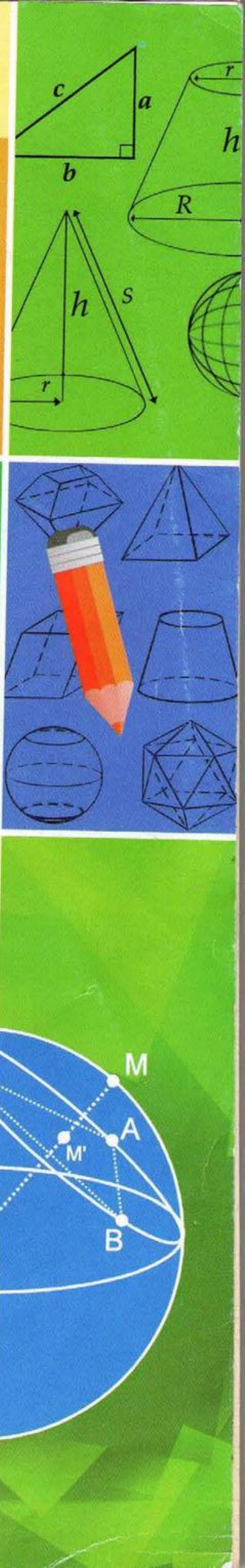
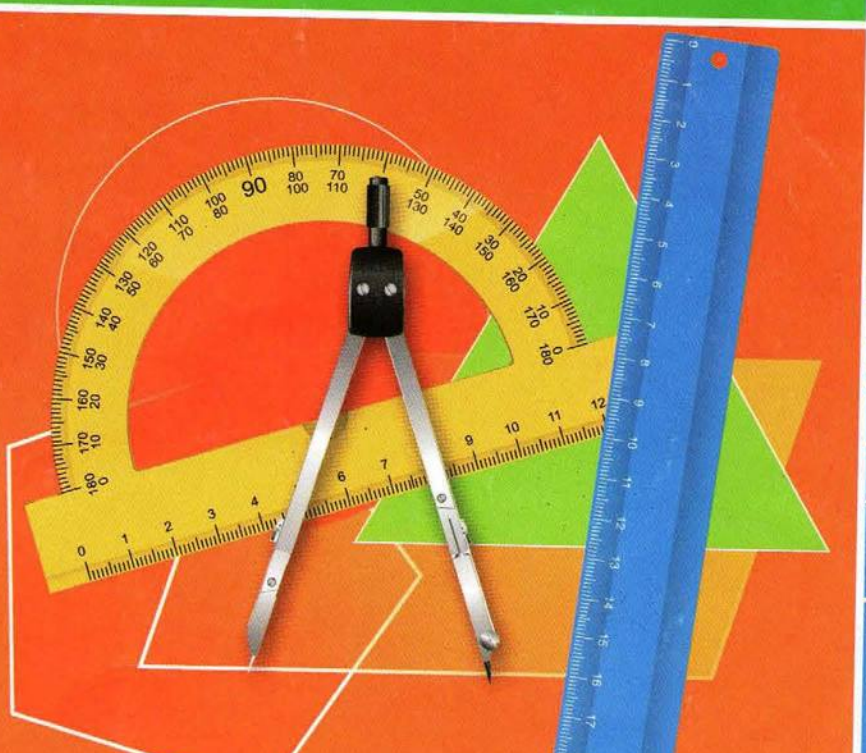
БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

ГЕОМЕТРИЯ

в схемах терминах таблицах





ФЕНИКС

Содержание

ТАБЛИЦА 1. ГЕОМЕТРИЯ КАК НАУКА И КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ

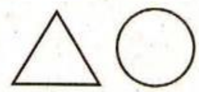
Долина Нила

Слово «геометрия» греческого происхождения («geo» — земля, «metreo» — измеряю).
Слово «планиметрия» происходит от латинского корня «planum» — плоская поверхность и греческого — «metreo» — измеряю.
Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «stereos» — пространственный, «metreo» — измеряю.

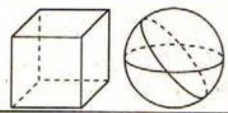
Эвклид (365–300 до н.э.)

Геометрия — математическая наука о пространственных формах, размерах и соотношениях геометрических объектов (фигур, тел).

Планиметрия — раздел геометрии, в котором изучают свойства фигур, расположенных в одной плоскости.



Стереометрия — раздел геометрии, в котором изучают свойства пространственных тел.



Периоды развития геометрии

I период — зарождение геометрии как математической науки, начало которого теряется в глубине столетий, а концом считают V в. до н.э. Этот период характеризуется накоплением фактов и установлением первых зависимостей между геометрическими фигурами. Начался он в Древнем Египте и Вавилоне, в VII в. до н.э. Эти знания были перенесены в Грецию, где постепенно они начали оформляться в четкую систему.

II период — (V в. до н.э. – XVII в. н.э.) — период возникновения и дальнейшего развития геометрии как самостоятельной науки. Около 300 лет до н.э. появились «Начала» Эвклида, в которых геометрия была систематизирована. Развитию геометрии способствовали ученые Греции, арабского Востока, Средней Азии, Индии, Китая, средневековой Европы.

III период — (XVII в. – 1826 г.). На этом этапе геометрия как наука рассматривает более общие фигуры и применяет совершенно новые методы. В этот период возникают: аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, проективная геометрия, начертательная геометрия.

IV период — (1826 год) начинается с открытия Н. И. Лобачевским неэвклидовой геометрии, которая включает в себя геометрию Эвклида. В направлениях, начертанных выдающимися математиками, развивается современная геометрия. Одним из важных разделов современной геометрии является топология.

ТАБЛИЦА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Аристотель (384–322 до н.э.)

Аксиома: от греческого «axios» — ценный, «axiota» — почет, уважение, авторитет. Термин ввел Аристотель.

Теорема: от греческого «theoreo» — размышляю, «theorema» — истина.

Полную систему аксиом эвклидовой геометрии дал Давид Гильберт (1899 г.)

Давид Гильберт (1862–1943)

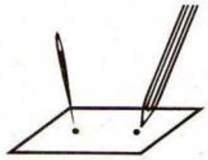
Аксиома **Аксиома** — математическое утверждение, которое принимается без доказательства.	**Определение** **Определение** — четкое формулирование того или иного математического понятия.
Теорема **Теорема** — математическое утверждение, истинность которого устанавливают путем доказательства. **Доказательство** — размышление, в ходе которого устанавливается истинность или ложность утверждения.	**Признак** **Признак** — утверждение, которое позволяет доказать, что данная фигура является фигурой, которая имеет данные качества или связана необходимыми отношениями.

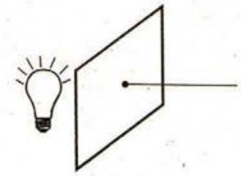
Элементы теории доказательств

Обычным языком	Языком логики	Пример
1. Если A, то B (прямая теорема) A — условие, B — вывод	$A \Rightarrow B$ — истинное	Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его катетов равна квадрату гипотенузы.
2. Если B, то A (обратная теорема)	$B \Rightarrow A$ — истинное	Если в некотором треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным.
3. Если не A, то не B (противоположная теорема)	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ — истинное	Если треугольник не прямоугольный, то квадрат любой его стороны не равен сумме квадратов двух других сторон.
4. Если не B, то не A (теорема, обратная противоположной)	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ — истинное	Если квадрат любой стороны треугольника не равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник не является прямоугольным.
A достаточное условие для B	$A \Rightarrow B$ — истинное	Для того, чтобы ромб был квадратом, достаточно, чтобы диагонали ромба были равны.
A необходимое условие для B	$B \Rightarrow A$ (или $\overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{B}}$) — истинное	Для того, чтобы ромб был квадратом, необходимо, чтобы диагонали ромба были равны.
A необходимое, но не достаточное условие для B	$B \Rightarrow A$ — истинное, или $A \Rightarrow B$ — ложное	Для того, чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы диагонали четырехугольника были перпендикулярны (но не достаточно).
A достаточное, но не необходимое условие для B	$A \Rightarrow B$ — истинное, или $B \Rightarrow A$ — ложное	Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы он имел все равные стороны (но не необходимо).
A необходимое и достаточное условие для B (A тогда и только тогда, когда B)	$A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ — истинное $A \Leftrightarrow B$ — истинное	Четырехугольник только тогда является параллелограммом, когда его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

ТАБЛИЦА 3. ТОЧКА, ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ, ЛУЧ, ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Слово «точка» является переводом латинского слова «pungo», что означает «тыкаю», «дотрагиваюсь».

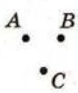




Слово «линия» происходит от латинского слова «linea», что значит «лён», «льняная нить», иногда это слово понимают как «прямая линия», и отсюда происходит слово «линейка».

Точка

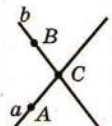
Точка — понятие, не имеющее значения. Представление о точке дает след на листе бумаги, сделанный хорошо заостренным карандашом.



Обозначают точки большими латинскими буквами: A, B, C.

Прямая

Прямая — понятие, не имеющее значения. Представление о прямой дают: туго натянутая нитка; луч света, проходящий сквозь узкое отверстие.

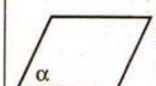


Обозначают прямые латинскими буквами: a, b..., или двумя большими латинскими буквами: AC, BC...

Прямая бесконечна.

Плоскость

Плоскость — понятие, не имеющее значения. Представление о плоскости дают: поверхность стола, оконного стекла, поверхность озера в тихую погоду и т.п.

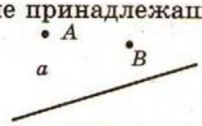


Плоскость представляют неограниченной, идеально ровной и гладкой.

Обозначают плоскости маленькими греческими буквами: α, β, ...

Аксиомы независимости

- Какой бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

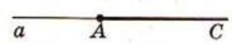


$A \notin a$, $B \in a$.

- Через любые две точки можно провести прямую и только одну.

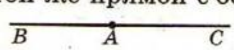
Луч

Луч (полупрямая) — часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, которая лежит по одну сторону от данной на ней точки **(начало луча).**



AC — луч.

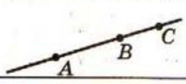
Дополняющие лучи — разные лучи одной и той же прямой с общим началом.



Лучи AC и AB — дополняющие.

Аксиома расположения точек на прямой

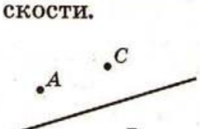
Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.



Точка B лежит между точками A и C.

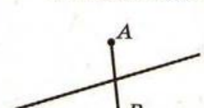
Аксиома расположения точек относительно прямой на плоскости

Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.



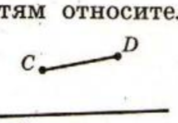
Точки A и C лежат в одной полуплоскости, точки A и B (B и C) лежат в разных полуплоскостях.

Свойства расположения точек относительно прямой на плоскости



Если точки принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок, соединяющий их, пересекает прямую.

Если отрезок пересекает прямую, то концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям относительно данной прямой.



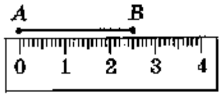
Если точки принадлежат одной полуплоскости, то отрезок, соединяющий их, не пересекает прямую.

Если отрезок не пересекает прямую, то концы отрезка принадлежат одной полуплоскости относительно данной прямой.

Две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.

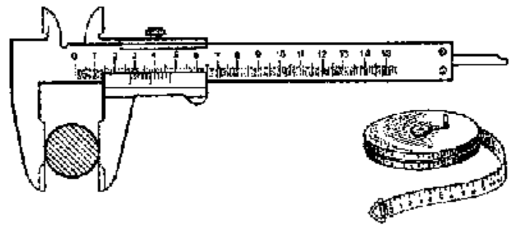
X =

ТАБЛИЦА 4. ОТРЕЗОК И ЕГО ДЛИНА. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ



$AB = 2,5$ см

Линейка впервые появились в Китае.



Обозначение отрезка двумя буквами, которые соответствуют его концам, ввели еще древние греки.

Определение

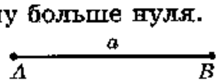
Отрезок — часть прямой, ограниченная двумя точками, включая эти точки.

Равные отрезки — отрезки, которые совпадают при наложении.
$CM = MD, AB = CD$.

Середина отрезка — точка, которая делит отрезок пополам. M — середина $CD, CM = MD$.

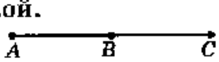
Измерение отрезков

1. Каждый отрезок имеет определенную длину больше нуля.



$AB = a > 0$

2. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.



$AC = AB + BC$

3. Равные отрезки имеют равные длины.
4. Если отрезки имеют равные длины, то они равны.

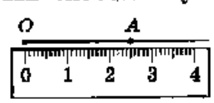
Единицы длины

$$1\begin{smallmatrix}\text{см}\\ \text{дм}\\ \text{м}\end{smallmatrix} = 10\begin{smallmatrix}\text{мм}\\ \text{см}\\ \text{дм}\end{smallmatrix} \quad 1\begin{smallmatrix}\text{дм}\\ \text{м}\end{smallmatrix} = 100\begin{smallmatrix}\text{мм}\\ \text{см}\end{smallmatrix}$$

$$1\begin{smallmatrix}\text{м}\\ \text{км}\end{smallmatrix} = 1000\begin{smallmatrix}\text{мм}\\ \text{м}\end{smallmatrix}$$

Отложение отрезков

На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок данной длины и только один.



Расстояние между двумя точками

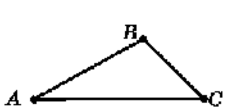
Расстояние между разными точками — длина отрезка с концами в данных точках.

Расстояние между точками, которые совпадают, равно 0.

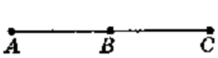
Для любых точек A и B расстояние от A до B равно расстоянию от B до A.

$AB = BA$

Для любых трех точек расстояние между двумя из них не больше суммы двух других расстояний.



$AC \le AB + BC$



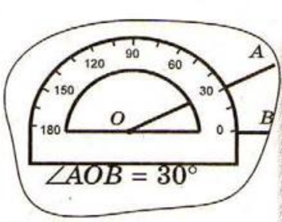
Сравнительная таблица метрических и других мер длины

1 верста = 1,0668 километра;
1 сажень = 2,1336 метра;
1 аршин = 71,12 сантиметра;
1 вершок = 4,445 сантиметра;
1 фут = 30,48 сантиметра;
1 дюйм = 2,54 сантиметра;
1 километр = 0,937363 версты;

$$1\text{ метр} = \begin{cases} 0,468691 \text{ сажня;} \\ 1,40607 \text{ аршина;} \\ 22,4972 \text{ вершка;} \\ 3,28084 \text{ фута;} \\ 39,3701 \text{ дюйма;} \end{cases}$$

1 географическая миля = 6,9569 версты = 7,4217 километра;
1 морская миля = 1,7362 версты = 1,8522 километра.

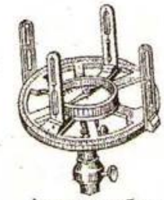
ТАБЛИЦА 5. УГЛЫ И ИХ ГРАДУСНЫЕ МЕРЫ



Слово «биссектриса» происходит от латинских «bis» — дважды, «seco» — секу и в переводе означает «та, что разделяет надвое».

Термин «градус» латинского происхождения, «gradus» означает «шаг», «ступень».

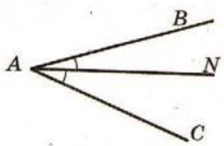
Знак угла был введен в XVII в.


Астролябия

Определение (стороны угла)

Угол — фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки **(вершины).**

$\angle BAC, \angle 1, \angle A$.

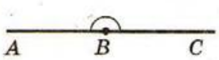


Биссектриса — луч, который выходит из вершины угла и делит его пополам.

AN — биссектриса, $\angle BAN = \angle CAN$

Равные углы — углы, совпадающие при наложении. $\angle BAN = \angle CAN$.

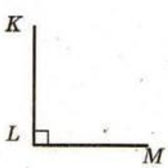
Виды углов



Развернутый угол — угол, стороны которого лежат на одной прямой.

$\angle ABC$ — развернутый,

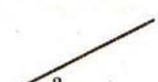
$\angle ABC = 180°$.



Прямой угол — угол, который равен половине развернутого угла.

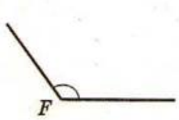
$\angle KLM$ — прямой,

$\angle KLM = 90°$.



Острый угол — угол меньше прямого угла.

$\angle 2$ — острый, $\angle 2 < 90°$.



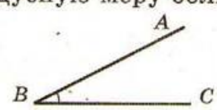
Тупой угол — угол больше прямого, но меньше развернутого.

$\angle F$ — тупой,

$90° < \angle F < 180°$.

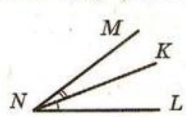
Измерение углов

1. Каждый угол имеет определенную градусную меру больше нуля.



$\angle ABC > 0$

2. Развернутый угол равен 180°.
3. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.



$\angle MNL = \angle MNK + \angle KNL$

4. Равные углы имеют равные градусные меры.
5. Если два угла имеют равные градусные меры, то они равны.

Единицы измерения углов

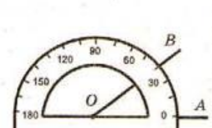
Градус — величина (градусная мера) угла, равная $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

Минута — $\frac{1}{60}$ часть градуса.

Секунда — $\frac{1}{60}$ часть минуты.

$1° = 60\ , 1\ = 60'', 1' = \frac{1}{60}^{\circ},\ 1'' = \frac{1}{60}'$.

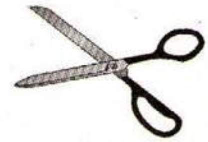
Отложение углов



От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол с данной градусной мерой меньше 180° и только один.

ТАБЛИЦА 6. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

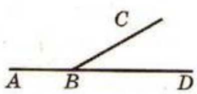
Термин «вертикальные углы» происходит от латинского «verticalis», что означает «вершинный».



Равенство вертикальных углов впервые доказал древнегреческий ученый Фалес Милетский.

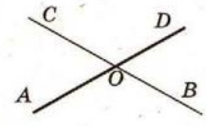
Смежные углы

Смежные углы — два угла, у которых одна сторона общая, а две другие стороны являются дополняющими лучами.



$\angle ABC$ и $\angle CBD$ — смежные углы.

Вертикальные углы

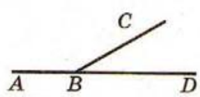


Вертикальные углы — два угла, стороны одного из которых являются дополняющими лучами сторон другого.

$\angle AOB$ и $\angle COD$ — вертикальные углы,
$\angle COA$ и $\angle DOB$ — вертикальные углы.

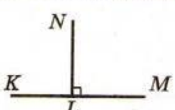
Свойства смежных углов

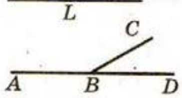
1. Сумма смежных углов равна 180°.



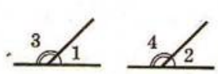
$\angle ABC + \angle CBD = 180°.$

2. Угол, смежный с прямым углом, является прямым; смежный с острым углом — тупым углом; угол, смежный с тупым углом, — острым углом.



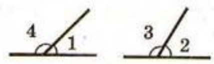


3. Если два угла равны, то смежные с ними углы тоже равны.



Если $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$.

4. Чем больше угол, тем угол, смежный с ним, меньше и наоборот.



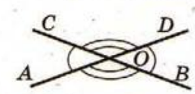
Если $\angle 1 < \angle 2$, то $\angle 4 > \angle 3$.

5. Биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

6. Если смежные углы равны, то они прямые.

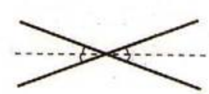
Свойства вертикальных углов

1. Вертикальные углы равны.



$\angle AOC = \angle BOD,$
$\angle COD = \angle AOB.$

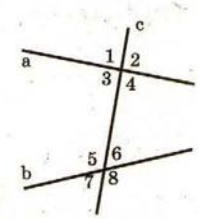
2. Биссектрисы вертикальных углов.



Угол между прямыми

Угол между двумя пересекающимися прямыми — не больший из вертикальных углов, образующихся при пересечении.
Угол между двумя не пересекающимися прямыми плоскостями равен 0°.

Углы при пересечении двух прямых секущей



При пересечении двух прямых третьей прямой (секущей) образуются пары углов:
$\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 5$ и $\angle 4$ — внутренние разносторонние;
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — внутренние односторонние;
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ — соответствующие;
$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ — внешние разносторонние;
$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ — внешние односторонние.

ТАБЛИЦА 7. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Фалес (624–548 до н.э.)

Слово «параллельный» от греческого «parallelos» — идущий рядом.

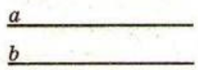
Знак параллельности $\parallel$ впервые встречается в трудах У. Оутреда (1677 г.).

В геометрии Лобачевского через точку, лежащую за прямой, проходит множество прямых, которые не пересекают данную прямую.

основатель новой геометрии

Н. И. Лобачевский (1792–1856)

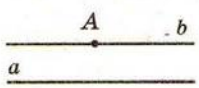
Определение



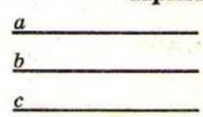
Параллельные прямые — две прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. $a \parallel b$. Прямые отрезки — лежат на прямых прямых

Аксиома параллельности

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.



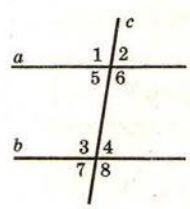
Признаки параллельности



Если две разные прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой. $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.

Если при пересечении двух прямых третьей
- сумма внутренних односторонних углов равна 180°,
- внутренние разносторонние углы равны,
- соответствующие углы равны,
- сумма внешних односторонних углов равна 180°,
- внешние разносторонние углы равны,

то прямые параллельны.



Если $\angle 5 + \angle 3 = 180°$ ($\angle 6 + \angle 4 = 180°$), то $a \parallel b$.

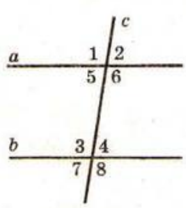
Если $\angle 5 = \angle 4$ ($\angle 3 = \angle 6$), то $a \parallel b$.

Если $\angle 1 = \angle 3$ (или $\angle 2 = \angle 4$, или $\angle 5 = \angle 7$, или $\angle 6 = \angle 8$), то $a \parallel b$.

Если $\angle 1 = \angle 8$ ($\angle 2 = \angle 7$), то $a \parallel b$.

Если $\angle 1 + \angle 7 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 8 = 180°$), то $a \parallel b$.

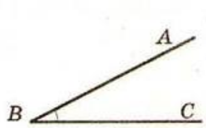
Свойства параллельных прямых



Если две параллельные прямые ($a \parallel b$) пересечены секущей (c), то:

- сумма внутренних односторонних углов равна 180°. $\angle 3 + \angle 5 = \angle 4 + \angle 6 = 180°$;
- внутренние разносторонние углы равны. $\angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 5$;
- соответствующие углы равны. $\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4, \angle 5 = \angle 7, \angle 6 = \angle 8$;
- сумма внешних односторонних углов равна 180°. $\angle 1 + \angle 7 = \angle 2 + \angle 8 = 180°$;
- внешние разносторонние углы равны. $\angle 1 = \angle 8, \angle 2 = \angle 7$.

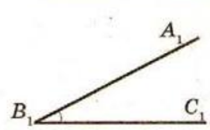
Углы с соответственно параллельными сторонами

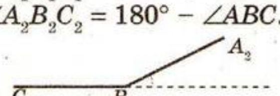


Углы с соответственно параллельными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°.

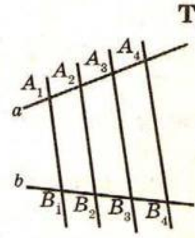
$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$,

$\angle A_2B_2C_2 = 180° - \angle ABC$.





Теорема Фалеса

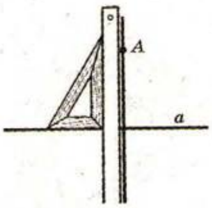


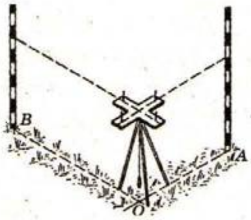
Если на одной из двух прямых отложено несколько равных отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, не пересекающие другую прямую, то и на ней отложатся равные отрезки.

Если $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, то $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

V

ТАБЛИЦА 8. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

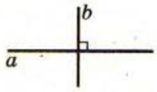




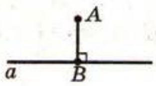
Знак перпендикулярности ⊥ был введен в XVII в.

Слово «перпендикуляр» происходит от латинского «perpendicularis», что означает «отвесный».

Определение

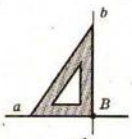


Перпендикулярные прямые — две прямые, которые пересекаются под прямым углом. $a \perp b$. Образуют четыре прямых угла

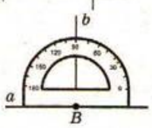


Перпедикуляр к данной прямой — отрезок прямой, перпендикулярной данной прямой, который имеет одним из своих концов их точку пересечения. Этот конец отрезка называют **основанием перпендикуляра**. AB — перпендикуляр, B — основой перпендикуляра.

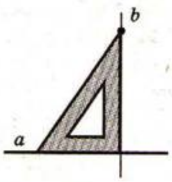
Существование и единственность перпендикулярной прямой



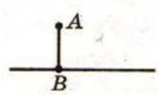
Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, причем только одну.



Через каждую точку вне данной прямой можно провести перпедикулярную к ней прямую и к тому же только одну.



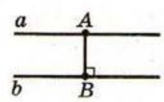
Расстояние от точки до прямой



Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного с данной точки на прямую.

Если точка лежит на прямой, то считают, что расстояние от этой точки до прямой равно 0.

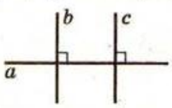
Растояние между параллельными прямыми



Расстояние между параллельными прямыми — расстояние от любой точки одной прямой до другой прямой.

Перпендикулярность и параллельность

Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

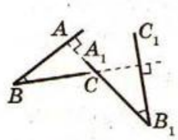


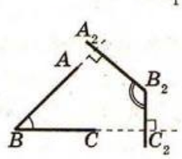
Если $b \perp a, c \perp a$, то $b \parallel c$.

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой.

Если $b \parallel c$ и $a \perp b$, то $a \perp c$.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами





Углы с соответственно перпендикулярными сторонами или равны, или в сумме составляют 180°.

$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$,

$\angle A_2B_2C_2 = 180° - \angle ABC$.

(7)

Существование и единственность перпендикуляра к прямой

Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.

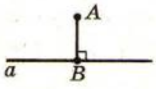


ТАБЛИЦА 9. ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ

Циркуль впервые появился в Китае.

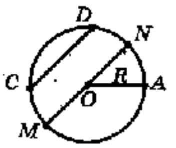
Слово «радиус» происходит от латинского «radius» — луч, спица в колесе; а слово «диаметр» — от греческого «diametros» — поперечник, слово «хорда» — от греческого «horde» — струна.

Слово «циркуль» латинского происхождения. Латинское «circulus» означает «круг», «обвод».

Из всех замкнутых фигур, имеющих одинаковый периметр, круг имеет наибольшую площадь.

Построение окружности с помощью веревки

Определение

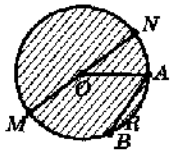


Окружность — множество точек плоскости, расстояние которых от данной точки **(центра окружности)** равно данному расстоянию **(радиусу окружности)**.

Радиус окружности — расстояние от центра окружности до точки окружности (отрезок, соединяющий центр окружности с точкой окружности). OA — радиус.

Хорда окружности — отрезок, соединяющий две точки окружности. CD — хорда.

Диаметр окружности — хорда, проходящая через центр окружности. MN — диаметр, $MN = 2OA$.

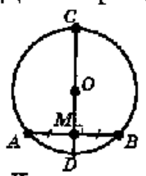


Круг — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки **(центра круга)** не превышает данное расстояние **(радиус круга)**.

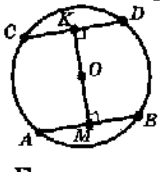
Радиус, хорда, диаметр окружности, которая ограничивает данный круг, называются **радиусом круга, хордой круга, диаметром круга.**

Свойства

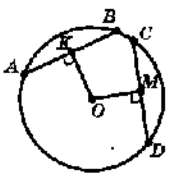
1. Диаметр окружности — наибольшая ее хорда.
2. Диаметр окружности равен удвоенному радиусу окружности.
3. Диаметр окружности, проведенный перпендикулярно хорде, делит хорду пополам. $AM = MB$.



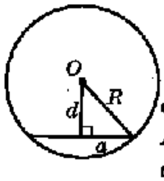
4. Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен ей. $CD \perp AB$.
5. Равные хорды окружности равноудалены от центра. Если $AB = CD$ и $OK \perp CD$, $OM \perp AB$, то $OK = OM$.



6. Если две хорды окружности равноудалены от центра, то они равны. Если $OK \perp AB$, $OM \perp CD$, $OK = OM$, то $AB = CD$.



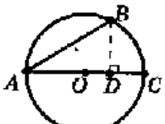
7. Расстояние от центра окружности до хорды выводится из соотношения



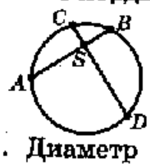
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = R^2,$$ где

a — длина хорды,
R — радиус окружности,
d — расстояние от точки к хорде.

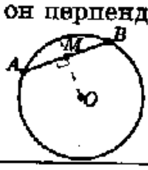
8. Если AB — хорда, AC — диаметр и $BD \perp AC$, то $AB^2 = AD \cdot AC$, $BD^2 = AD \cdot DC$.



9. Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.



10. Диаметр (радиус), перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам. Верна и обратная теорема: если диаметр (радиус) делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.



$AM \cdot MB = (R + OM)(R - OM) = R^2 - OM^2$,

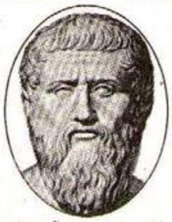
где R — радиус окружности.

ТАБЛИЦА 10. ДУГИ И ХОРДЫ ОКРУЖНОСТИ

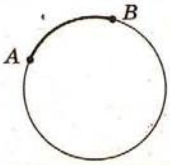
Слово «коло» было известно еще в Киевской Руси.

Около 6 тыс. лет назад в Вавилоне было изобретено колесо.

Знак дуги $\cup$ встречается у Эригона (1634 г.) и намного раньше — у Платона из Тиволи (XII в.).



Платон (428–348 до н.э.)

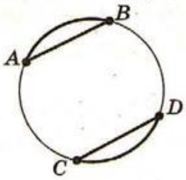


Определение

Дуга окружности — часть окружности, ограниченная двумя ее точками. $\cup AB$.

Свойства

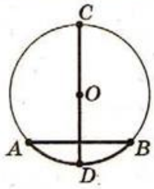
1. Равные дуги стягивают равные хорды.



Если $\cup \mathrm{AB} = \cup CD$, то $AB = CD$.

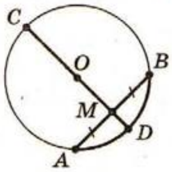
2. Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$.

3. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит дугу, стягивающую хорду, пополам.



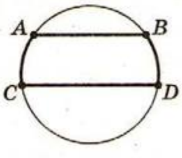
Если $AB \perp CD$ и CD — диаметр, то $\cup AD = \cup DB$.

4. Если диаметр проходит через середину хорды (не являющейся диаметром), то он делит дугу, которую стягивает хорда, пополам.



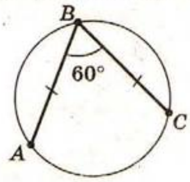
Если $AM = MB$ и CD — диаметр, то $\cup AD = \cup BD$.

5. Параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги.



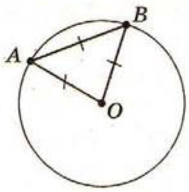
Если $AB \parallel CD$, то $\cup AC = \cup BD$.

6. Две равные хорды, имеющие общий конец и образующие угол 60°, делят окружность на три равные дуги.



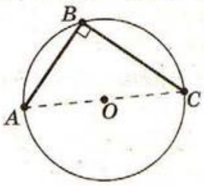
Если $AB = BC, \angle ABC = 60°$, то $\cup AB = \cup BC = \cup AC$.

7. Если хорда равна радиусу окружности, то хорда отсекает от окружности дугу, составляющую $\frac{1}{6}$ часть окружности.



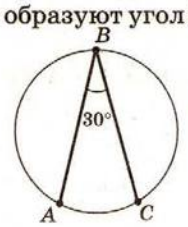
Если $AB = AO = BO$, то $\cup AB = \frac{1}{6} \cup ABA$.

8. Если две хорды имеют общий конец и образуют угол 90°, то другие концы хорд делят окружность пополам.



Если $AB \perp BC$, то $\cup ABC = \cup AC$.

9. Если две хорды имеют общий конец и образуют угол 30°, то другие концы хорд отсекают от окружности дугу, составляющую $\frac{1}{6}$ часть окружности.



Если $\angle ABC = 30°$, то $\cup AC = \frac{1}{6} \cup ABCA$.

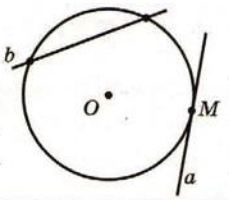
ТАБЛИЦА 11. КАСАТЕЛЬНЫЕ И СЕКУЩИЕ К ОКРУЖНОСТИ

По утверждению зоологов, головастики, медузы, крабы движутся по окружностям.

Во времена Пифагора (VI в. до н.э.) окружность считали самой совершенной фигурой.

О том, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу этой окружности, проведенному в точку касания, знал еще древнегреческий астроном Архит Таренский (ок. 440–360 гг. до н.э.).

Доказательство теоремы о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности, приписывают греческому ученому Герону Александрийскому (ок. I в. н.э.).



Определение

Касательная к окружности — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку **(точку касания)**.

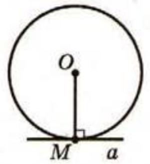
a — касательная к окружности, M — точка касания.

Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

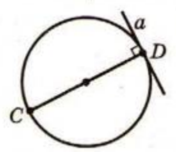
b — секущая.

Свойства

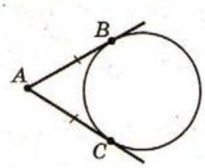
1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
$OM \perp a$.



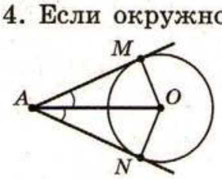
2. Если прямая проходит через конец диаметра и перпендикулярна ему, то эта прямая касательная.



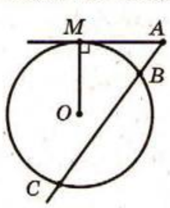
3. Если из одной точки к данной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны между собой. $AB = AC$.



4. Если окружность касается сторон угла, то центр окружности лежит на биссектрисе угла. AO — биссектриса.

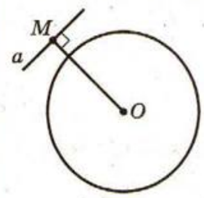


5. Если из точки за окружностью проведены к ней касательная и секущая, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению всего отрезка касательной на его внешнюю часть.
$AM^2 = AB \cdot AC$.

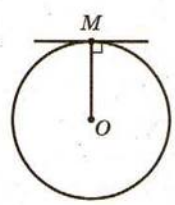


Взаимное расположение прямой и окружности

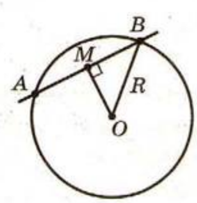
Если расстояние OM от центра окружности до прямой:



- больше радиуса ($OM > R$), то прямая не имеет общих точек с окружностью;



- равно радиусу ($OM = R$), то прямая касается к окружности;



- меньше радиуса ($OM < R$), то окружность отсекает на прямой хорду длиной $2\sqrt{R^2 - OM^2}$.

6. Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие ее соответственно в точках A, B, C, D, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP = (PO - R)(PO + R) = PO^2 - R^2$,
где R — радиус окружности.

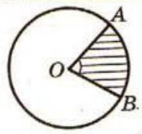
ТАБЛИЦА 12. УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛОВ

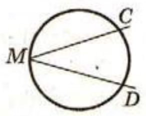
Доказательство теоремы о вписанном угле приводится в «Началах» Эвклида.

Слово «радиан» происходит от латинского «radius» — луч.

То, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой, знали вавилоняне еще 4000 лет назад.

Слово «радиан» в печатном труде впервые употреблено Дж. Томсоном (1873 г.).





Определение

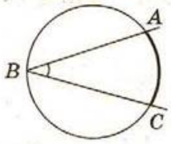
Центральный угол в окружности — плоский угол с вершиной в его центре. $\angle AOB$ — центральный.

Градусная мера дуги окружности — градусная мера соответствующего центрального угла. $\cup AB = \angle AOB$.

Вписанный угол в окружность — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность. $\angle CMD$ — вписанный.

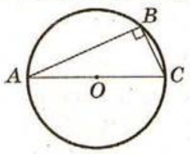
Свойства

1. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.



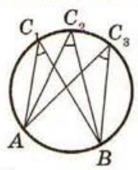
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым.



$\angle ABC = 90°$.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



$\angle AC_1B = \angle AC_2B = \angle AC_3B$.

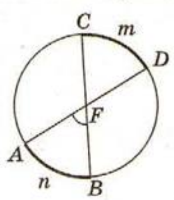
4. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, либо равны, либо их сумма равна 180°.

$\angle ACB = \angle ADB$,

$\angle ACB + \angle BFA = 180°$.

Дополнительные свойства

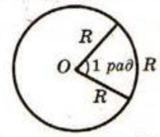
- Угол с вершиной в центре окружности равен $\frac{1}{2}$ суммы дуг, принадлежащих вертикальным углам, одним из которых есть данный угол.



$$\angle AFD = \frac{1}{2}(\cup AnB + \cup CmD).$$

Радианная мера углов

1 радиан — центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу окружности.

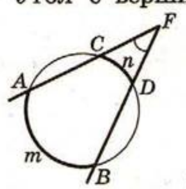


1 радиан ≈ 57°17′45″, 1° ≈ 0,01745... радиан

Радианные и градусные меры некоторых углов

Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусы	0	30	45	60	90	120	135	150	180

- Угол с вершиной за окружностью (стороны которого пересекают окружность) равен половине разности дуг, лежащих внутри угла.

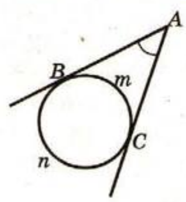


$$\angle AFB = \frac{1}{2}(\cup AmB - \cup CnD).$$

- Угол, образованный касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине дуги, лежащей внутри угла.

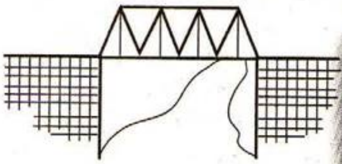
$$\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AmB.$$

- Угол между двумя касательными к окружности, проведенными через одну точку, равен половине разности дуг, ограниченных его сторонами.



$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\cup BnC - \cup BmC).$$

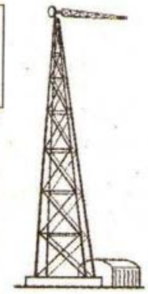
ТАБЛИЦА 13. ТРЕУГОЛЬНИКИ

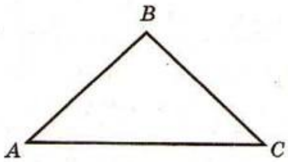


Треугольник — жесткая фигура. Это свойство используют при строительстве мостовых арок, конструировании подъемных кранов и т.д.

Свойства треугольника системно изложены в «Началах» Эвклида.

Знак для обозначения треугольника еще в I в. н.э. применил древнегреческий учений Герон, а знак Δ применяется с IV в. н.э.





Определение

Треугольник — фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются **вершинами**, а отрезки — **сторонами**.

На рисунке: ΔABC; A, B, C — вершины, AB, BC, AC — стороны.

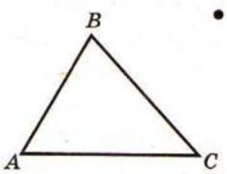
Угол треугольника ABC при вершине A — угол BAC (угол образован лучами AB и AC).

Углы A и B треугольника ABC называют **прилегающими к стороне AB**, угол C — **противолежащим к стороне AB**.

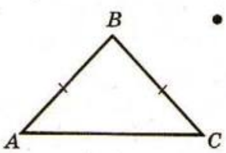
Периметр - сумма длин трех сторон

Виды треугольников

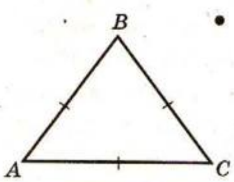
По сторонам



- **Разносторонний** — длины сторон разные. $AB \neq BC \neq AC$.

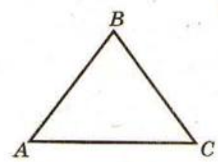


- **Равнобедренный** — две стороны равны. $AB = BC$.

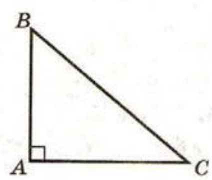


- **Равносторонний** — все стороны равны. $AB = BC = AC$.

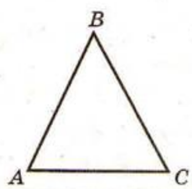
По углам



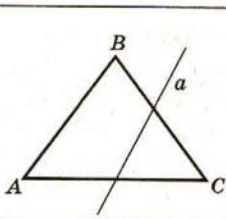
- **Тупоугольный** треугольник имеет тупой угол. $90° < \angle B < 180°$.



- **Прямоугольный** треугольник имеет прямой угол. $\angle A = 90°$.

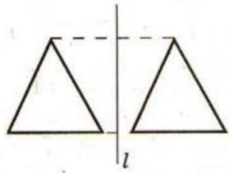


- **Остроугольный** – треугольник, у которого все углы острые.



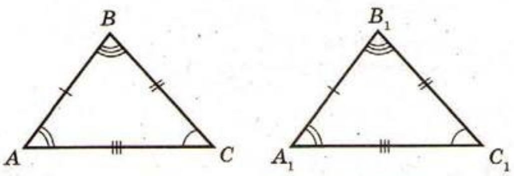
Если прямая, которая не проходит ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон.

ТАБЛИЦА 14. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Словами «что и требовалось доказать» заканчивается каждое математическое рассуждение Эвклида в его «Началах».

О том, что треугольник определяется одной стороной и двумя прилегающими к ней углами, знал еще древнегреческий ученый Фалес Милетский.



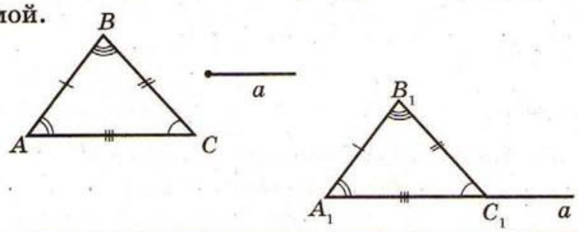
Определение

Равные треугольники — треугольники, у которых сответствующие стороны равны и равны соответствующие углы.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означает, что $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = = A_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$.

Аксиома существовования треугольника, равного данному

Каким бы ни был треугольник, существует треугольник, равный ему в заданном расположении относительно данной полупрямой.

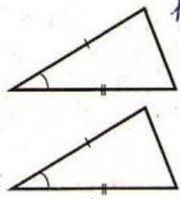


Свойства равных треугольников

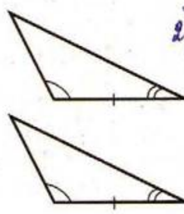
1. В равных треугольниках соответствующие стороны равны.
2. В равных треугольниках соответствующие углы равны.
3. Периметры равных треугольников равны.
4. Площади равных треугольников равны.
5. Против соответственно равных сторон лежат равные углы
6. Против равных углов - равные стороны

(Т)

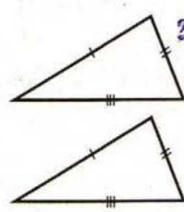
Признаки равенства



1) • Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



2) • Если сторона и прилегающие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилегающим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

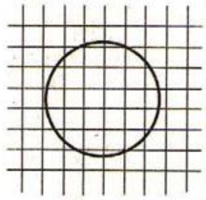


3) • Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дополнительные признаки равенства

- Если две стороны и медиана, проведенная к третьей стороне треугольника, соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.
- Если два угла и высота, проведенная к стороне, к которой прилегают эти углы, одного треугольника, соответственно равны двум углам и высоте, проведенной к стороне, к которой прилегают эти углы, другого треугольника, то такие треугольники равны.
- Если сторона, высота и медиана, проведенные к стороне одного треугольника, соответственно равны стороне, высоте и медиане, проведенным к этой стороне другого треугольника, то эти треугольники равны.
- Если медиана и углы, на которые она делит угол, одного треугольника, соответственно равны медиане и углам, на которые она делит угол, другого треугольника, то эти треугольники равны.

ТАБЛИЦА 15. ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ



$S \approx 13$

Эвклид в своих «Началах» не выражает результат вычисления площади числом, а сравнивает площади разных фигур между собой.

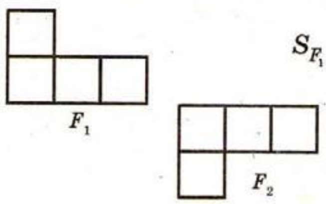
Вычисление площади называют квадратурой. У древних египтян квадратура фигуры сводилась к построению равновеликого квадрата.

Знак S площади фигуры первая буква латинского слова «superfecies» — поверхность.

Площадь фигуры

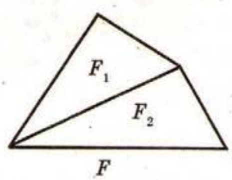
Площадь фигуры — это положительная величина, числовое значение которой имеет такие свойства:

1. Равные фигуры имеют равные площади.



$S_{F_1} = S_{F_2}$.

2. Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей.



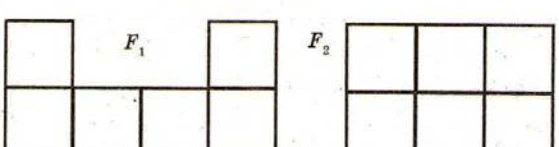
$S_F = S_{F_1} + S_{F_2}$.

3. Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.

$S_F = 1$ см^2.

Равновеликие фигуры

Равновеликие фигуры — фигуры, площади которых одинаковы.



F_1 и F_2 — равновеликие.

Если фигуры равны, то они равновелики.

Единицы площади

$$1\begin{matrix}\text{см}^2\\ \text{дм}^2\\ \text{м}^2\end{matrix} = 10^2 \begin{matrix}\text{мм}^2\\ \text{см}^2\\ \text{дм}^2\end{matrix} = 100\begin{matrix}\text{мм}^2\\ \text{см}^2\\ \text{дм}^2\end{matrix}$$

$$1\begin{matrix}\text{дм}^2\\ \text{м}^2\end{matrix} = 100^2\begin{matrix}\text{мм}^2\\ \text{см}^2\end{matrix} = 10\,000\begin{matrix}\text{мм}^2\\ \text{см}^2\end{matrix}$$

$$1\begin{matrix}\text{м}^2\\ \text{км}^2\end{matrix} = 1000^2\begin{matrix}\text{мм}^2\\ \text{м}^2\end{matrix} = 1\,000\,000\begin{matrix}\text{мм}^2\\ \text{м}^2\end{matrix}$$

Сравнительная таблица метрических и других мер площади

1 кв. верста = 1,13806 кв. километра;

1 кв. сажень = 4,55225 кв. метра;

1 кв. аршин = 0,505805 кв. метра;

1 кв. вершок = 19,758 кв. сантиметра;

1 кв. фут = 0,092903 кв. метра;

1 кв. дюйм = 6,4516 кв. сантиметра;

1 десятина = 1,09254 гектара;

1 десятина = 2400 кв. сажней;

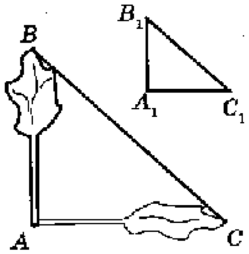
1 кв. километр = 0,878687 кв. версты;

$$1\ \text{кв. метр} = \begin{cases} 0,219672\ \text{сажня;}\\ 1,97704\ \text{аршина;}\\ 10,7639\ \text{фута;}\end{cases}$$

1 кв. сантиметр = 0,155 кв. дюйма;

1 гектар = 0,915299 десятины.

ТАБЛИЦА 16. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Учение о подобии фигуры возникло еще в Древней Греции.

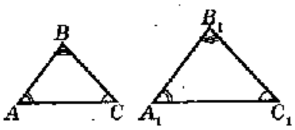
Применяя понятие подобия, можно определить высоту предмета по его тени.

В «Началах» Эвклида изложение вопроса подобия базируется на учении о пропорциональных отрезках.

Знак подобия – ввел Г. Лейбниц (1679).

Г. Лейбниц (1646 1716)

Определение

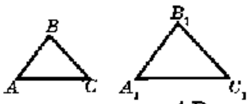


Подобные треугольники — треугольники, в которых соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ означает $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Существование треугольника, подобного данному

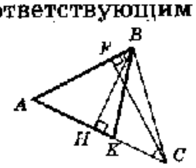
Для любого треугольника и положительного числа k существует треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия k.



$\Delta ABC \overset{k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$, то есть $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$.

Свойства подобных треугольников

1. Соответствующие линейные элементы подобных треугольников пропорциональны соответствующим сторонам.



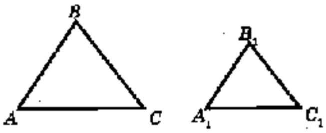
$\Delta ABC \sim \Delta AKB$, поэтому $\dfrac{FC}{BH} = \dfrac{AB}{AK}$.

2. Периметры подобных треугольников относятся как соответствующие стороны.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

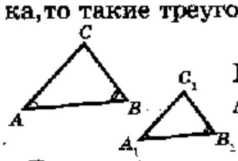
3. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2.$$



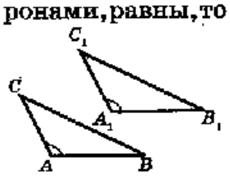
Признаки подобия треугольников

- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



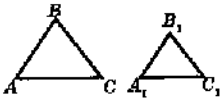
Если $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы, образованные этими сторонами, равны, то эти треугольники подобны.

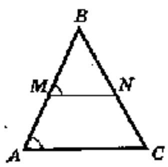


Если $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

- Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого, то эти треугольники подобны.



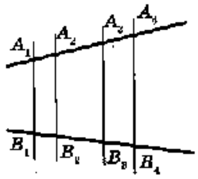
Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



- Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. $\Delta ABC \sim \Delta MBN$.

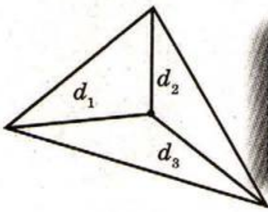
Обобщенная теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отложены несколько отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие другую прямую, то на ней отложатся отрезки, пропорциональные данным.



$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4}.$$

ТАБЛИЦА 17. СВОЙСТВА СТОРОН И УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



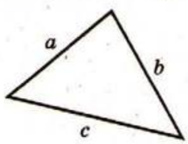
Сумма расстояний от произвольной точки внутри треугольника до его вершин удовлетворяет неравенству:
$P < d_1 + d_2 + d_3 > 2p.$

В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше 180°.

В геометрии Римана сумма углов треугольника больше 180°.

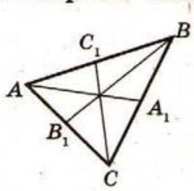
Свойства сторон

1. В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.



$a - b < c < a + b.$

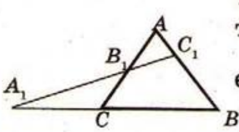
2. Теорема Чевы.



Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда

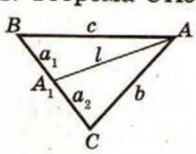
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

3. Теорема Менелая.



Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, если $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} = 1.$

4. Теорема Стюарта.

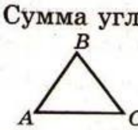


Если $AA_1 = l$, то

$$l^2 = \frac{b^2a_1 + c^2a_2}{a_1 + a_2} - a_1a_2.$$

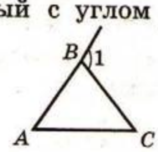
Свойства углов

1. Сумма углов треугольника равна 180°.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$

2. **Внешний угол треугольника** — угол, смежный с углом треугольника. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

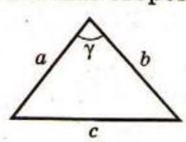


$\angle 1 = \angle A + \angle C.$

Внешний угол треугольника больше угла треугольника, не смежного с ним.

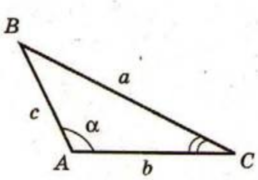
$\angle 1 > \angle A, \angle 1 > \angle C.$

3. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла — большая сторона.



Если $c^2 = a^2 + b^2$, то $\gamma = 90°$.
Если $c^2 < a^2 + b^2$, то $\gamma < 90°$.
Если $c^2 > a^2 + b^2$, то $90° < \gamma < 180°$.

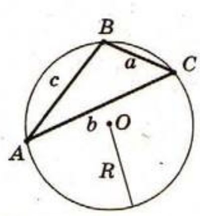
Теорема косинусов



Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Теорема синусов

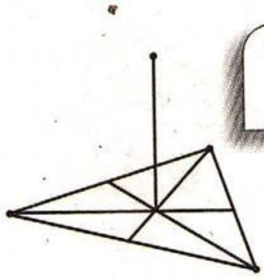


Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

ТАБЛИЦА 18. МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

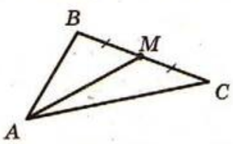


Слово «медиана» происходит от латинского «medius» и означает «средний».

*Точку пересечения медиан треугольника называют ~~биссектрисой~~ барицентром, или **центром масс.***

О том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, знал еще Архимед (III в. до н.э.).

Архимед (287–212 до н.э.)



Определение

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину угла треугольника с серединой противолежащей стороны.

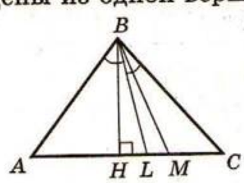
AM — медиана.

Свойства

1. Медиана треугольника делит треугольник на два равновеликих треугольника.

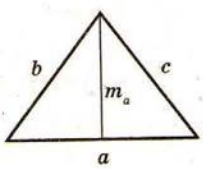
$$S_{\Delta ABM} = S_{\Delta MBC}.$$

2. Медиана треугольника не меньше высоты и биссектрисы треугольника, которые проведены из одной вершины.



$$BM \geq BL,$$
$$BM \geq BH.$$

3. Длину медианы можно вычислить по формуле:



$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

4. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

$$CM = \frac{1}{2}AB.$$

5. Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центре масс треугольника) и делятся этой точкой в соотношении 2:1, считая от вершины.

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{2}{1}.$$

6. Длины медиан треугольника m_a, m_b, m_c связаны со сторонами a, b, c треугольника соотношением:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

7. Три медианы треугольника делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.

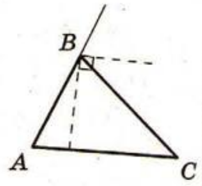
$$S_{\Delta AOC_1} = S_{\Delta C_1OB} = S_{\Delta BOA_1} = \\ = S_{\Delta A_1OC} = S_{\Delta COB_1} = \\ = S_{\Delta B_1OA} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}.$$

8. Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)} \times \\ \times \sqrt{(m_a - m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)},$$

где m_a, m_b, m_c — медианы треугольника, проведенные к сторонам a, b, c.

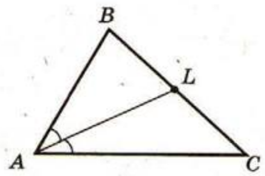
ТАБЛИЦА 19. БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА



Биссектрисы внутреннего и внешнего углов с общей вершиной являются перпендикулярными.

Биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными с одной вершины.

О том, что три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, было известно еще Эвклиду.



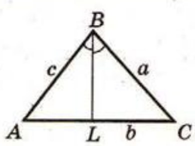
Определение

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла, объединяющего вершину угла с точкой противолежащей стороны.

AL — биссектриса.

Свойства

1. Биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



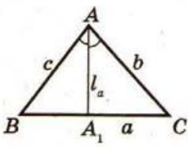
$$\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC};\quad AL=\frac{bc}{a+c};$$

$$CL=\frac{ba}{a+c}.$$

2. Биссектриса треугольника не меньше высоты треугольника и не больше медианы треугольника, которые проведены из одной вершины.

$$BH \le BL \le BM.$$

3. Длину биссектрисы можно вычислить по одной из формул:

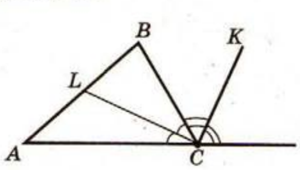


$$AA_1^2 = AB\cdot AC - A_1B\cdot A_1C;$$

$$AA_1=\frac{2AB\cdot AC}{AB+AC}\cos\frac{A}{2};$$

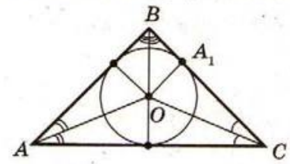
$$l_a=\frac{2\sqrt{bc(p-a)\cdot p}}{b+c}.$$

4. Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего угла треугольника перпендикулярны.



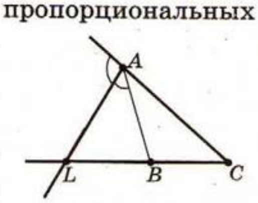
$$\angle LCK = 90^\circ.$$

5. Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре окружности вписаной в треугольник.



$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a}.$$

6. Биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в точке, удаленной от концов стороны на расстояниях, пропорциональных двум другим сторонам.



$$\frac{LB}{LC}=\frac{AB}{AC}.$$

7. Продолжение биссектрисы пересекается с серединным перпендикуляром в точке, которая лежит на окружности, описанной около треугольника.

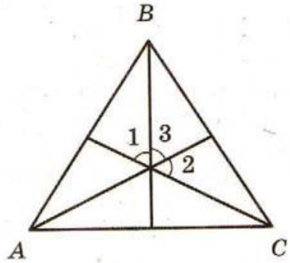
8. Если O — точка пересечения биссектрис, то:

$$\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B,$$

$$\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C,$$

$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$$

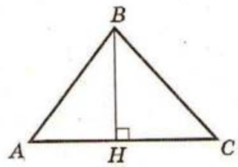
ТАБЛИЦА 20. ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА



Углы между высотами остроугольного треугольника равны углам треугольника.
$\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle B$, $\angle 3 = \angle C$.

Точку пересечения прямых, на которых лежат высоты треугольника, называют ***ортоцентром.***

В 1765 году Л. Эйлер доказал, что точка пересечения высот треугольника, точка пересечения его медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой, которую со временем назвали «прямой Эйлера».



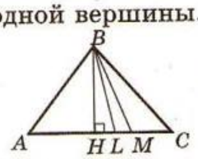
Определение

Высота треугольника — отрезок перпендикуляра, проведенного от вершины треугольника к прямой, содержащей противолежащую сторону.

BH — высота треугольника.

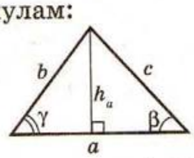
Свойства

1. Высота треугольника не больше биссектрисы и медианы треугольника, проведенных из одной вершины.



$BH \le BL, BH \le BM.$

2. Высоту треугольника можно найти по формулам:

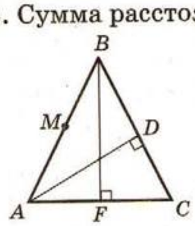


$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta,$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

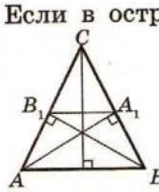
где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

3. Сумма расстояний от оснований двух высот треугольника к середине его третьей стороны равна третьей стороне.

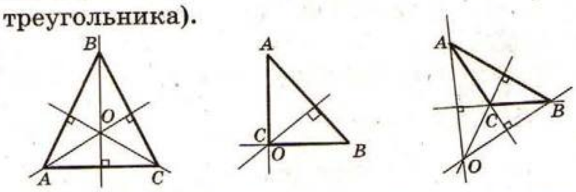


Если $AM = MB, BF \perp AC$, $AD \perp BC$, то $MF + MD = AB$.

4. Если в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, то $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$.



5. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке (ортоцентр треугольника).



6. Высоты треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам.

$h_a : h_b : h_c = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}.$

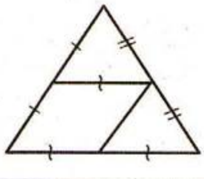
7. Сумма обратных чисел к высотам треугольника равна числу, обратному к радиусу вписанной окружности.

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

8. Площадь треугольника может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}},$$

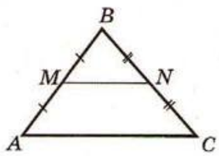
где h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, проведенные к сторонам a, b, c.



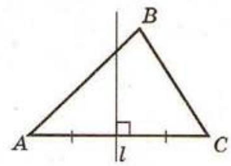
Свойство средней линии треугольника является следствием теоремы Фалеса.

*Серединный перпендикуляр иногда называют **медиатрисой**, от латинского «medius» — средний.*

Определение



Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.
MN — средняя линия.



Серединный перпендикуляр — прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам.
l — серединный перпендикуляр.

Свойства

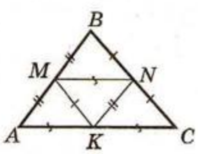
1. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

$$MN \parallel AC,\ MN = \frac{AC}{2}.$$

2. Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному (с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$).

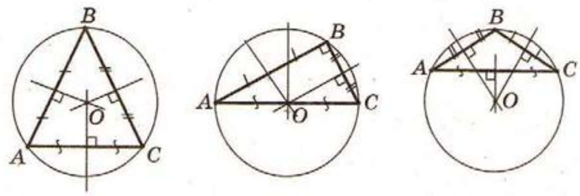
$$\Delta ABC \sim \Delta MBN;$$
$$\frac{AC}{MN} = \frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = 2.$$

3. Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника, подобных данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

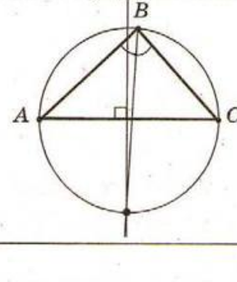


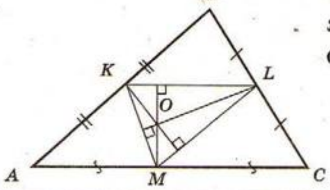
$$\Delta AMK = \Delta MBN = \Delta KNC = \Delta NKM.$$

1. Все серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника.



2. Продолжение биссектрисы треугольника пересекается с серединным перпендикуляром в точке, лежащей на окружности, описанной около треугольника.



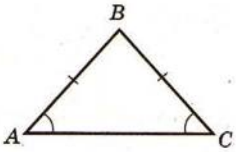


Точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника является точкой пересечения высот треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

ТАБЛИЦА 22. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Свойства равнобедренного треугольника были известны с давних времен. Еще древние вавилоняне (II в. до н.э.) знали, что углы у основания равнобедренного треугольника равны.

Любой треугольник можно разрезать на равнобедренные треугольники.



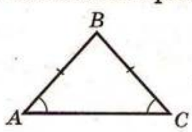
Определение

Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две стороны равны.

Равные стороны называют **боковыми сторонами**, а третью сторону — **основанием.** ΔABC — равнобедренный, AB и BC — боковые стороны, AC — основа.

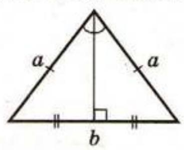
Свойства

(Т) 1. У равнобедренного треугольника углы у основания равны.



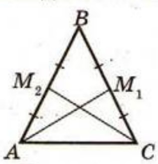
$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - \angle B}{2}.$$

(Т) 2. Медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.



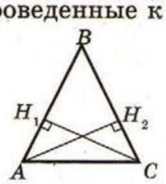
$$h_b = l_b = m_b = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}.$$

3. Медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



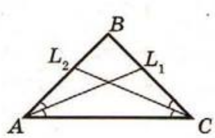
$$AM_1 = CM_2.$$

4. Высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



$$AH_2 = CH_1.$$

5. Биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны.



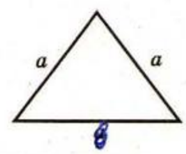
$$AL_1 = CL_2.$$

Признаки

Если у треугольника
- два угла равны,
- высота и медиана совпадают,
- высота и биссектриса совпадают,
- медиана и биссектриса совпадают,
- две медианы равны,
- две высоты равны,
- две биссектрисы равны,

то он равнобедренный.

Площадь



$$S = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

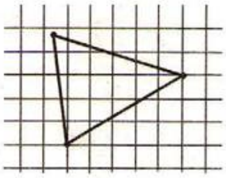
Радиус окружности, описанной около треугольника

$$R = \frac{a^2}{2h_b}; \quad R = \frac{a}{2\cos\frac{B}{2}}.$$

Радиус окружности, вписанной в треугольник

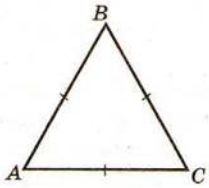
$$r = \frac{b(2a - b)}{4h_b}; \quad r = \frac{b}{2}tg\,\frac{A}{2}.$$

ТАБЛИЦА 23. РАВНОСТОРОННИЙ (ПРАВИЛЬНЫЙ) ТРЕУГОЛЬНИК



Не существует правильного треугольника, вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги. Однако существует достаточно простой способ начертить «почти правильный треугольник» на клетчатой бумаге.

Из всех треугольников, имеющих определенный периметр, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.



Определение

Равносторонний треугольник — треугольник, все стороны которого равны.

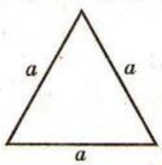
ΔABC — равносторонний.

Свойства

1. Все углы равностороннего треугольника равны по 60°.

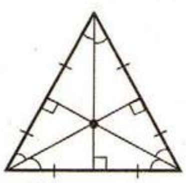
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60°.$$

2. Периметр треугольника равен утроенной стороне треугольника.



$P = 3a.$

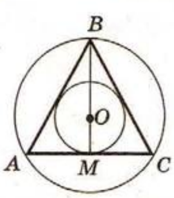
3. Точки пересечения медиан, высот, биссектрис, серединных перпендикуляров совпадают. Эту точку называют **центром треугольника**.



4. Центр треугольника является центром окружности, вписанной в треугольник, и центром окружности, описанной около треугольника.

5. Центр правильного треугольника делит его высоты в соотношении 2:1, считая от вершины.

$BO : MO = 2.$



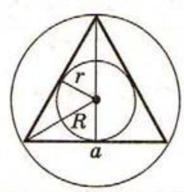
6. Медиана, высота и биссектриса правильного треугольника, проведенные из одной вершины, совпадают.

Признаки

Если у треугольника
- два угла равны по 60°,
- две стороны равны, а один угол равен 60°,
- медианы равны,
- биссектрисы равны,
- высоты равны,

то он равносторонний.

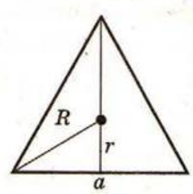
Радиусы вписанной и описанной окружностей



$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$R = 2r.$$

Площадь правильного треугольника



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = 3\sqrt{3}r^2.$$

7. Сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри правильного треугольника до его вершин, есть величина постоянная и равна высоте треугольника.

$AM + BM + CM = H,$

где H — высота треугольника ABC.

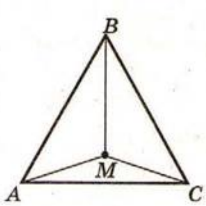


ТАБЛИЦА 24. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

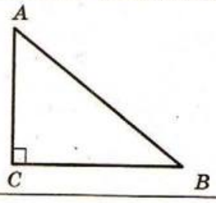
Термин «гипотенуза» происходит от греческого слова, которое означает «та, что стягивает».

Слово «катет» греческого происхождения и означает — «отвес», «перпендикуляр». Термин распространился только с XVIII в.

Прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются натуральными числами, называют пифагоровыми треугольниками. Их множество: 5, 12, 13; 6, 8, 10 и т.д.

Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называют египетским.

Пифагор (580–500 гг. до н.э.)

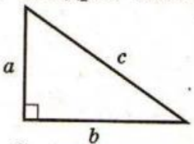


Определение

Прямоугольный треугольник — треугольник, имеющий прямой угол. Стороны, образующие прямой угол, называют **катетами**, а сторону, противолежащую к прямому углу, называют **гипотенузой**.
ΔABC — прямоугольный, AC и BC — катеты, AB — гипотенуза.

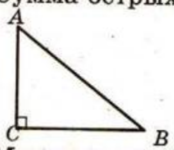
Свойства

1. Катет меньше гипотенузы.
$AC < AB, BC < AB.$
2. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора):



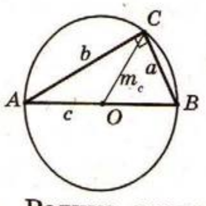
$c^2 = a^2 + b^2$.

3. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°:



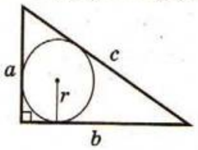
$\angle A + \angle B = 90°$.

4. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы (радиусу окружности, описанной около треугольника).



$m_c = \frac{1}{2}c = R.$

5. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно вычислить по формуле:

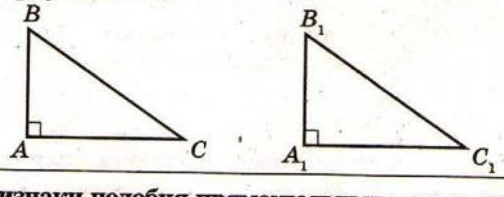


$r = \frac{a+b-c}{2}$.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника равны, если:

- два катета одного треугольника равны двум катетам другого;
- катет и острый угол одного треугольника равны катету и острому углу другого треугольника;
- гипотенуза и острый угол одного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого треугольника;
- гипотенуза и катет одного треугольника равны гипотенузе и катету другого треугольника.



Признаки подобия прямоугольных треугольников

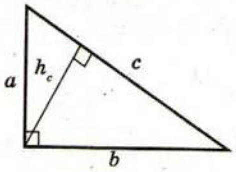
Два прямоугольных треугольника подобны, если:

- они имеют по одному равному острому углу;
- катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника;
- катет и гипотенуза одного треугольника пропорциональны соответственно катету и гипотенузе другого треугольника.

Признаки прямоугольных треугольников

Если в треугольнике	квадрат одной из сторон равен сумме квадратов двух других сторон,	то он прямоугольный.
	медиана треугольника равна половине соответствующей стороны,	
	центр описанной окружности лежит на стороне треугольника,	

Площадь прямоугольного треугольника



$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

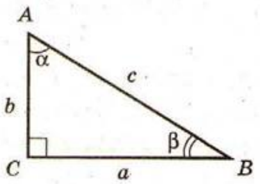
6. Катет прям. Δ-ка, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.
7. Если катет пр. тр. равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

ТАБЛИЦА 25. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРЫХ УГЛОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТУПЫХ УГЛОВ

Первые тригонометрические таблицы составил греческий математик Гипарх (II в. до н.э.).

Слово «тригонометрия» происходит от греческих слов «тригонон» — треугольник и «метрео» — меряю, измеряю.

Определение



Синус острого угла прямоугольного треугольника — отношение противолежащего катета к гипотенузе. $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$.

Косинус острого угла прямоугольного треугольника — отношение прилежащего катета к гипотенузе. $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$.

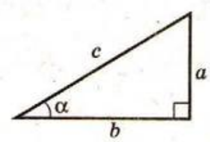
Тангенс острого угла прямоугольного треугольника — отношение противолежащего катета к прилежащему. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b}{a}$.

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника — отношение прилежащего катета к противолежащему. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{a}{b}$.

Значения тригонометрических функций некоторых углов

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника



• Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на sin α.

$$a = c\sin\alpha.$$

• Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на cos α.

$$b = c\cos\alpha.$$

• Катет, противолежащий углу α, равен произведению другого катета на tg α.

$$a = b\operatorname{tg}\alpha.$$

• Катет, прилежащий к углу α, равен произведению другого катета на ctg α.

$$b = a\operatorname{ctg}\alpha.$$

Соотношения между триногометрическими функциями одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$; $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Формулы дополняющих углов

Дополняющие углы — два угла, сумма которых равна 90°.

$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$;
$\operatorname{tg}(90°-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(90°-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

Тригонометрические функции тупых углов

Косинус, тангенс и котангенс тупого угла противоположны соответственно косинусу, тангенсу и котангенсу угла, смежного с тупым.

$\cos\alpha = -\cos\beta$;
$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$;
$\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta$.

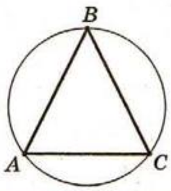
Синусы смежных углов равны.

$$\sin\alpha = \sin\beta.$$

ТАБЛИЦА 26. ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Радиус R описанной и радиус r вписанной окружностей удовлетворяют неравенству $R \geq 2r$

Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный треугольник.



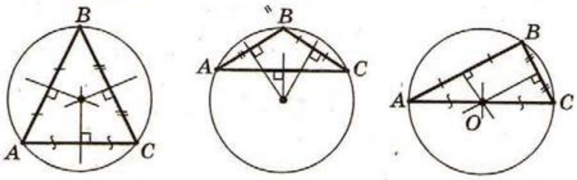
Определение

Окружность, описанная около треугольника, — окружность, вмещающая вершины треугольника.
Треугольник при этом называют **вписанным.**

Свойства

1. Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну.

2. Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров. Причем центр окружности лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный; за треугольником, если треугольник тупоугольный; лежит на середине гипотенузы, если треугольник прямоугольный.



3. Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формулам:

- $R = \dfrac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь.
- $R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{b}{2\sin B} = \dfrac{c}{2\sin C}$,

где a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — соответствующие углы.

4. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3},\text{ где } a \text{ — длина стороны.}$$

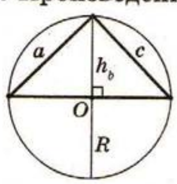
5. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно a, а боковая сторона — b:

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

6. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c:

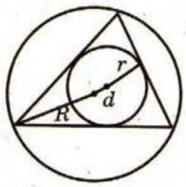
$$R = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

7. Произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, проведенной к третьей стороне, на диаметр окружности, описанной около этого треугольника:



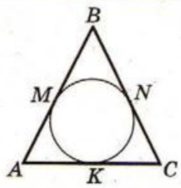
$$ac = 2R \cdot h_b.$$

ТАБЛИЦА 27. ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей вычисляются по формуле $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Задачу о вписывании окружности в данный треугольник решал еще Эвклид в своих «Началах».



Определение

Окружность, вписанная в треугольник, — окружность, касающаяся всех сторон треугольника.

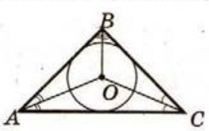
M, N, K — точки касания.

Треугольник при этом называют **описанным.**

Свойства

1. В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну.

2. Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника.



$\angle BAO = \angle CAO$,
$\angle ABO = \angle CBO$,
$\angle BCO = \angle ACO$.

3. Радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен соответствующей стороне.

$OK \perp AC$,
$OM \perp AB$,
$ON \perp BC$.

4. Радиус вписанной окружности можно вычислить по формулам:

- $r = \dfrac{S}{p}$, где S — площадь треугольника,

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — полупериметр;}$$

- $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$, где h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, проведенные соответственно к сторонам a, b, c треугольника;

- $r = (p-a)\,tg\dfrac{A}{2} = (p-b)\,tg\dfrac{B}{2} = (p-c)\,tg\dfrac{C}{2}$;

- $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

5. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a:

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

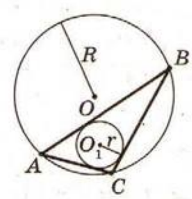
6. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а боковая сторона — b:

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}.$$

7. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c:

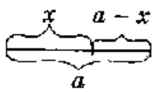
$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

8. Расстояние от центра окружности, вписанной в произвольный треугольник, до центра окружности, описанной около этого треугольника:



$OO_1 = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, где
R — радиус описанной окружности,
r — радиус вписанной окружности.

ТАБЛИЦА 28. СРЕДНИЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ, В ОКРУЖНОСТИ



$x^2 = a \cdot (a - x);$

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a = 0,62a$

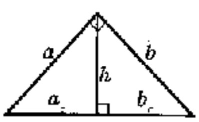
Золотым сечением *(разделом)* *называется раздел отрезка a на две части, большая из которых x есть средним пропорциональным между всем отрезком и его меньшей частью.*

На рисунке скульптуры Аполлона точка C делит отрезок BD, а точка B делит отрезок AC в соотношении золотого сечения.

Между двумя парами листьев (A и C) третий листок (B) расположен в месте золотого сечения.

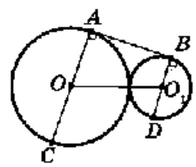
Определение

Если длины отрезков a, b, c связаны отношением $b^2 = ac$ или $b = \sqrt{ac}$, то отрезок b называют **средним пропорциональным (средним геометрическим)** отрезков a и c.



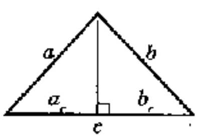
В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, проведенный из вершины прямого угла, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу.

$h^2 = a_c \cdot b_c$.



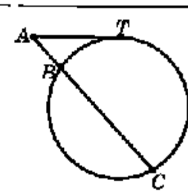
Общая касательная к двум окружностям, касающимся снаружи, является средним пропорциональным между диаметрами этих окружностей.

$AB^2 = AC \cdot BD$.



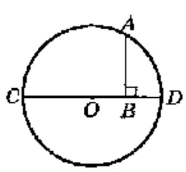
В прямоугольном треугольнике каждый катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$a^2 = c \cdot a_c$; $b^2 = c \cdot b_c$.



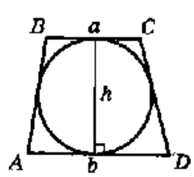
Длина касательной к окружности является средним пропорциональным отрезком секущей, проведенной из точки касательной.

$AT^2 = AB \cdot AC$.



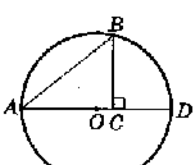
Перпендикуляр, опущенный из любой точки окружности на диаметр, является средним пропорциональным между отрезками диаметра.

$AB^2 = CB \cdot BD$.



Если в равнобокую трапецию вписана окружность, то высота трапеции является средним пропорциональным ее оснований.

$h^2 = ab$.



Хорда, проведенная из конца диаметра, является средним пропорциональным между диаметром и проекцией хорды на диаметр.

$AB^2 = AD \cdot AC$.

ТАБЛИЦА 29. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Древние египтяне 4000 лет назад знали формулу для вычисления площади треугольника.

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

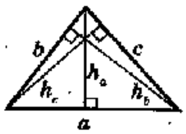
Герон в своей работе «Метрика» приводит доказательство формулы

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Герон (ок. I в. н.э.)

Площадь треугольника

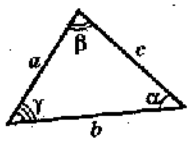
Площадь треугольника равна:



- половине произведения стороны треугольника на высоту, проведенную к этой стороне:

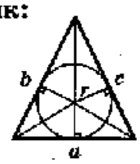
$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

- полупроизведению двух сторон на синус угла между ними:



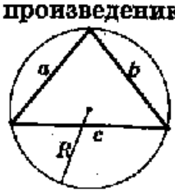
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

- произведению полупериметра треугольника на радиус окружности, вписанной в треугольник:



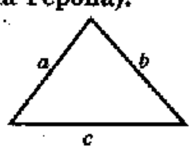
$S=p\cdot r$, где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

- произведению сторон треугольника, деленному на удвоенный диаметр окружности, описанной около треугольника:



$$S=\frac{abc}{4R}.$$

- корню квадратному из произведения полупериметра треугольника на разность полупериметров и сторон треугольника (формула Герона):



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

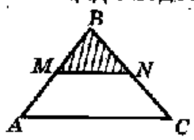
где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

- $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$,

где R — радиус описанной окружности, A, B, C — величины углов треугольника.

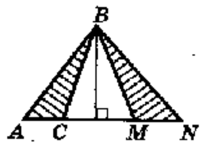
Некоторые соотношения площадей треугольников

- Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих линейных элементов, их отношение равно квадрату коэффициента подобия.



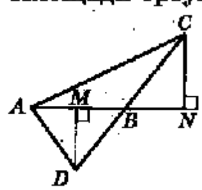
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}}=\left(\frac{AB}{MB}\right)^2=\left(\frac{AC}{MN}\right)^2=\left(\frac{BC}{BN}\right)^2.$$

- Площади треугольников, имеющих равные высоты (общую высоту), относятся как стороны, к которым проведены высоты.



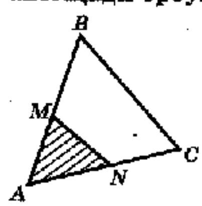
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}}=\frac{AC}{MN}.$$

- Площади треугольников, имеющих равные стороны, относятся как соответствующие этим сторонам высоты.



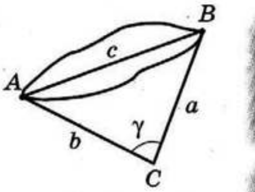
$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{DM}{CN}.$$

- Площади треугольников, имеющих равные углы (общий угол), относятся как произведения сторон, содержащих этот угол.



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AMN}}=\frac{AB\cdot AC}{AM\cdot AN}.$$

ТАБЛИЦА 30. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Впервые теорему косинусов сформулировал словесно в XVI в. французский математик Франсуа Виет.

Теорема косинусов по сути была доказана геометрически в «Началах» Эвклида.

Теорему синусов доказал в XI в. известный астроном аль-Бируни.

Ученые Индии, как и ученые стран ислама IX–X в., сводили решение произвольных треугольников к решению прямоугольных треугольников.

Франсуа Виет (1540–1603)

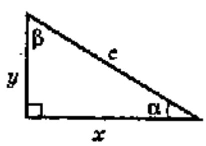
Определение

Решение треугольников — нахождение неизвестных сторон и углов треугольника по известным его углам и сторонам.

Решение прямоугольных треугольников

- **Дано:** c — гипотенуза, α — острый угол.

Найти: x, y, β.

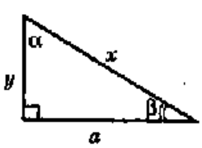


Решение:

$\beta = 90° - \alpha$;
$x = c\cos\alpha$;
$y = c\sin\alpha$.

- **Дано:** a — катет, β — острый угол, прилежащий к катету a.

Найти: x, y, α.



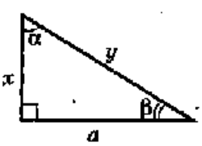
Решение:

$\alpha = 90° - \beta$; $y = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

$x = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

- **Дано:** a — катет, α — острый угол, противолежащий катету a.

Найти: x, y, β.



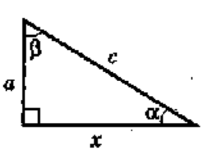
Решение:

$\beta = 90° - \alpha$; $x = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

$y = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

- **Дано:** c — гипотенуза, a — катет.

Найти: x, α, β.



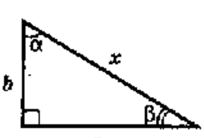
Решение:

$x = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$;

$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$.

- **Дано:** a — катет, b — катет.

Найти: x, α, β.



Решение:

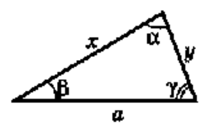
$x = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$;

$\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{b}{a}$.

Решение произвольных треугольников

- **Дано:** a — сторона, β и γ — прилежащие углы к стороне a.

Найти: α, x, y.



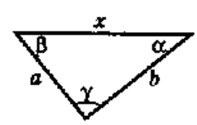
Решение:

$\alpha = 180° - \beta - \gamma$; $y = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$;

$x = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

- **Дано:** a и b — стороны, γ — угол между ними.

Найти: x, α, β.



Решение:

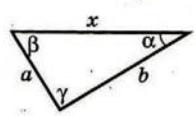
$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$;

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$.

- **Дано:** a и b — стороны, α — угол, противолежащий к стороне a.

Найти: x, β, γ.



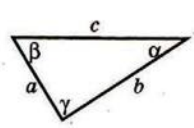
Решение:

$\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$ (два случая);

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$; $x = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

- **Дано:** a, b, c — стороны.

Найти: α, β, γ.



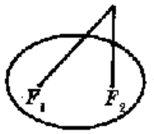
Решение:

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

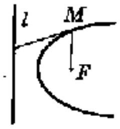
$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$;

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$ или $\left(\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$.

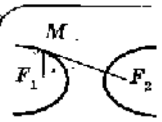
ТАБЛИЦА 31. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ



Геометрическим местом точек, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, является ***эллипс.***



Геометрическим местом точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки F (фокуса) и данной прямой l (директрисы), является ***парабола.***

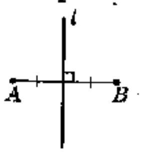


Геометрическим местом точек плоскости, разность расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, является ***гипербола.***

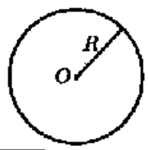
Определение

Геометрическое место точек — фигура, которая состоит из всех точек плоскости, имеющих определенное свойство.

Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек — это серединный перпендикуляр отрезка, соединяющий эти точки.

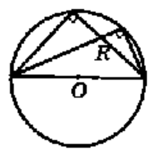


Геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от точки, есть окружность с центром в данной точке.

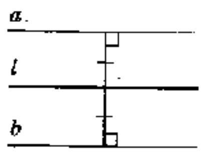


Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон данного угла (меньше, чем развернутый) — это биссектриса угла.

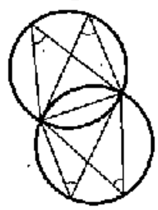
Геометрическое место вершин прямоугольных треугольников с данной гипотенузой есть окружность, построенная на гипотенузе как на диаметре (за исключением концов гипотенузы).



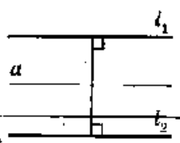
Геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных прямых, есть прямая, параллельная этим прямым и проходящая через середину их общего перпендикуляра.



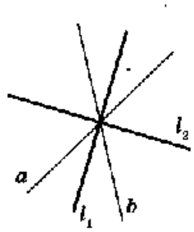
Геометрическое место точек, из которых данный отрезок видно под данным углом, есть две симметричные дуги, опирающиеся на данный отрезок (за исключением концов дуг).



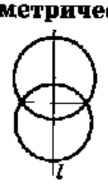
Геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от прямой — это две параллельные ей прямые.



Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых — это две взаимно перпендикулярные прямые, на которых лежат биссектрисы вертикальных углов, образованных при пересечении данных прямых.

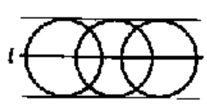


Геометрическое место центров окружностей, которые:

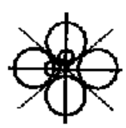


- проходят через данные две точки — это серединный перпендикуляр;

- касаются сторон угла — это биссектриса угла;



- касаются двух параллельных прямых — это прямая, параллельная данным и проходящая через середину общего перпендикуляра;

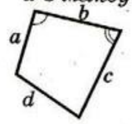


- касаются двух пересекающихся прямых — это две взаимно перпендикулярные прямые.

ТАБЛИЦА 32. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Свойства четырехугольников исследовали известнейшие ученые разных эпох: Эвклид, Архимед, Ньютон, Эйлер, Гаусс, Лагранж и многие другие.

Если в четырехугольнике известны стороны a, b, c и углы B и C между ними, то длину четвертой стороны можно вычислить по формуле:

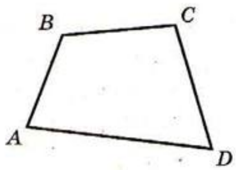


$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2bc\cos C + 2ac\cos(B + C).$$

Термин «диагональ» происходит от объединения двух греческих слов: «диа» — через, сквозь и «гониа» — угол, то есть означает идущий от угла к углу. Термин стал общепринятым в XVIII в.

Ж. Л. Лагранж (1736–1813)

Определение



Четырехугольник — фигура, состоящая из четырех точек и четырех отрезков, последовательно их соединяющих; причем ни одна из трех данных точек не лежит на одной прямой, а отрезки, соединяющие их, не пересекаются.

A, B, C, D — **вершины четырехугольника.**

AB, BC, CD, AD — **стороны четырехугольника.**

Соседние вершины — вершины четырехугольника, являющиеся концами одной из его сторон. A и B, B и C, C и D, D и A.

Противолежащие вершины — несоседние вершины. A и C, B и D.

Соседние стороны — стороны, выходящие из одной вершины. AB и AD, BC и AB, BC и CD, AD и CD.

Противолежащие стороны — несоседние стороны. AB и CD, AD и BC.

Диагональ четырехугольника — отрезок, соединяющий противолежащие вершины четырехугольника. AC и BD.

Периметр четырехугольника — сумма длин всех сторон.

Выпуклый четырехугольник — четырехугольник, лежащий в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей его сторону.

Внешний угол четырехугольника — угол, смежный с углом четырехугольника.

Свойства углов

1. Сумма углов четырехугольника равна 360°.
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

2. Сумма внешних углов четырехугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°.$

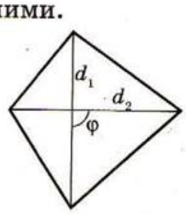
Свойства сторон

1. Каждая сторона четырехугольника меньше суммы всех его других сторон.
$AD < AB + BC + CD$.

2. Сумма диагоналей четырехугольника меньше его периметра.
$AC + BD < AB + BC + CD + AD$.

Площадь четырехугольника

Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус между ними.



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$

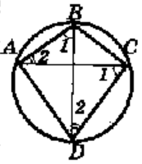
Дополнительные свойства

Сумма квадратов сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей и квадрата удвоенного отрезка, соединяющего середины диагоналей четырехугольника.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + (2m)^2.$$

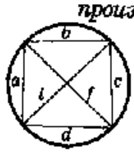
ТАБЛИЦА 33. ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Диагонали вписанного четырехугольника



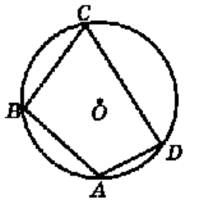
разбивают его на две пары подобных треугольников.

Известна также другая теорема Птолемея. Диагонали вписанного четырехугольника относятся как суммы произведений сторон, сходящихся в концах диагоналей.



$$\frac{l}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Клавдий Птолемей (около 100–178) — древнегреческий ученый, известный благодаря своим трудам по географии, оптике, математике и особенно астрономии.



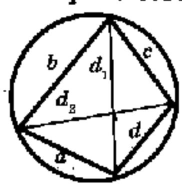
Определение

Вписанный четырехугольник — четырехугольник, все вершины которого принадлежат данной окружности. Окружность называют описанной. Центр окружности, описанной около четырехугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных ко всем его сторонам.

Свойства

1. Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противолежащих углов равна 180°.

2. Теорема Птолемея.



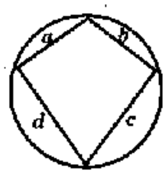
Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.

$d_1d_2 = ac + bd$.

Признак

Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Площадь вписанного четырехугольника



$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Дополнительные свойства

1. Если четырехугольник со сторонами a, b, c, d вписан в окружность, то его диагонали можно найти по формулам:

$$d_1 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}};$$

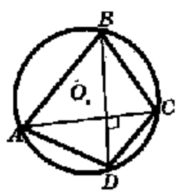
$$d_2 = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

2. Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R, то его площадь S можно вычислить по формуле:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin \alpha,$$

где α — угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

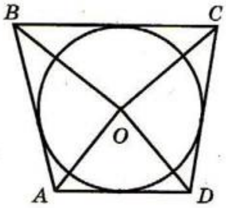
3. Если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность, то сумма квадратов противолежащих сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.



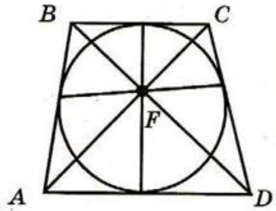
$BC^2 + AD^2 = 4R^2$,

где R — радиус окружности.

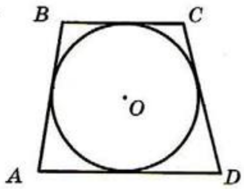
ТАБЛИЦА 34. ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК



Если четырехугольник описанный, то сумма углов, под которыми видно из центра вписанной окружности две его противолежащие стороны, равна180°.
$\angle AOB + \angle COD = \angle AOD + \angle BOC = 180°$.



Диагонали описанного четырехугольника и отрезки, соединяющие точки касания окружности к противолежащим сторонам, проходят через одну точку.



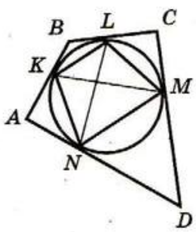
Определение

Описанный четырехугольник — четырехугольник, каждая сторона которого касается данной окружности. Окружность называют вписанной. Центр окружности, вписанной в четырехугольник, — точка пересечения биссектрис всех его углов.

Свойства

1. Если четырехугольник описан около окружности, то сумма двух его противолежащих сторон равна сумме двух других его сторон.
$AB + CD = AD + BC$.

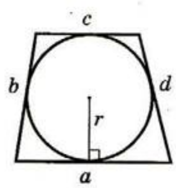
2. Точка пересечения диагоналей описанного четырехугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого служат точки касания сторон данного четырехугольника со вписанной окружностью.



Признак

Если в четырехугольнике сумма двух его противолежащих сторон равна сумме двух других его сторон, то в четырехугольник можно вписать окружность.

Площадь описанного четырехугольника



Площадь описанного четырехугольника равна произведению полупериметра четырехугольника на радиус вписанной окружности.

$S = pr$, где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Дополнительные свойства

1. Площадь выпуклого четырехугольника, в который можно вписать окружность, можно вычислить по формуле:

$$S = \sqrt{abcd}\,\sin\frac{B+D}{2},$$

где a, b, c, d — стороны четырехугольника; B и D — два противолежащих угла четырехугольника.

2. Площадь выпуклого четырехугольника, в который можно вписать окружность и около которого можно описать окружность, можно найти по формуле:

$$S = \sqrt{abcd},$$

где a, b, c, d — длины сторон четырехугольника.

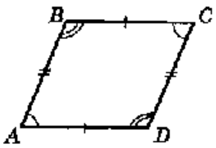
ТАБЛИЦА 35. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Если
$ABCD$ — параллелограмм,
а M — произвольная точка, то
$$MA^2 + MC^2 - MB^2 - MD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2).$$

Слово «параллелограмм» происходит от объединения греческих «параллелос» — идущий рядом, и «грамма» — черта, риска, линия.

Если M – произвольная точка внутри параллелограмма, то $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.

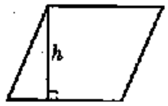
Термин «параллелограмм» впервые встречается у Эвклида.



Определение

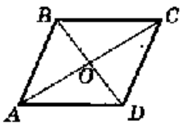
Параллелограмм— четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

Высота параллелограмма — перпендикуляр, проведенный из любой точки одной стороны на противолежащую сторону (расстояние между противолежащими сторонами).



Свойства

1. Противолежащие стороны равны.
$AB = CD, AD = BC.$
2. Противолежащие стороны параллельны.
$AB \parallel CD, AD \parallel BC.$
3. Противолежащие углы равны.
$\angle A = \angle C, \angle B = \angle D.$
4. Сумма соседних углов равна 180°.
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°.$
5. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
$AO = OC, BO = OD.$



6. Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.
$\Delta ABD = \Delta CDB, \Delta ABC = \Delta CDA.$
7. Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его четырех сторон.
$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2.$
8. Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.
$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD} = S_{\Delta AOD}.$

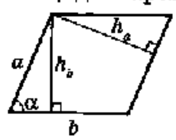
Признаки

Если в четырехугольнике
- две противолежащие стороны равны и параллельны,
- противолежащие стороны попарно равны,
- диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам,
- каждая диагональ делит четырехугольник на два равных треугольника,

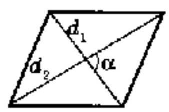
это параллелограмм.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна:

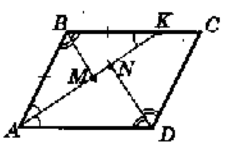


- произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне:
$S = ah_a = bh_b;$
- произведению двух его соседних сторон на синус угла между ними:
$S = ab \sin \alpha;$



- половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

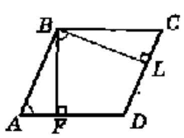
Дополнительные свойства



Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. ΔABK — равнобедренный.

Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны. $AK \perp BM$.

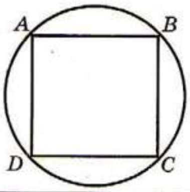
Биссектрисы противолежащих углов параллельны или лежат на одной прямой. $BM \parallel DN$.



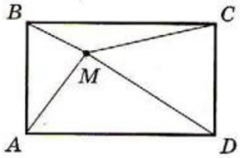
Высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам, к которым проведены высоты. $AD : DC = BL : BF$.

Высоты параллелограмма, проведенные из одной вершины, образуют угол, равный углу паралллелограмма при соседней вершине. $\angle FBL = \angle BAD$.

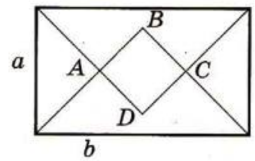
ТАБЛИЦА 36. ПРЯМОУГОЛЬНИК



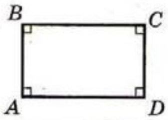
Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником.



Если ABCD — прямоугольник, а M — произвольная точка, то $AM^2 + CM^2 = DM^2 + BM^2$.



Биссектрисы углов любого прямоугольника при пересечении образуют квадрат со стороной $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}$, *где a, b — стороны прямоугольника.*



Определение

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые.

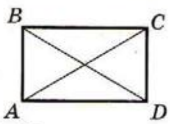
Свойства

1. Прямоугольник имеет все свойства параллелограмма.

2. Все углы прямые.

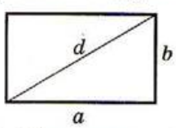
$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ.$$

3. Диагонали прямоугольника равны.



$AC = BD.$

4. Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух соседних сторон.

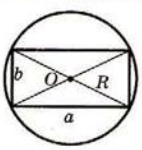


$d^2 = a^2 + b^2.$

5. Периметр прямоугольника равен удвоенной сумме соседних сторон.

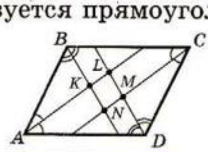
$$P = 2(a + b).$$

6. Около любого прямоугольника можно описать окружность.



$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

7. При пересечении биссектрис внутренних углов произвольного параллелограмма образуется прямоугольник.



$KLMN$ — прямоугольник.

Признаки

Если в четырехугольнике
- три угла прямые,
- диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам,

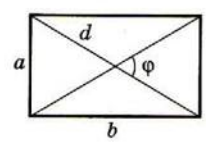
то это прямоугольник.

Если в параллелограмме
- один угол прямой,
- диагонали равны,
- диагонали образуют равные углы с одной из сторон,

то это прямоугольник.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна:



- произведению его сторон.

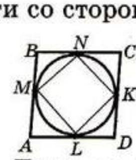
$$S = ab.$$

- половине произведения квадрата диагонали на синус угла между диагоналями.

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

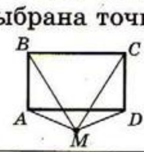
Дополнительные свойства

1. Точки касания вписанной в ромб окружности со сторонами ромба являются вершинами прямоугольника.



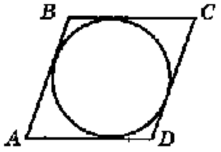
Если $ABCD$ — ромб, M, N, K, L — точки касания, то $MNKL$ — прямоугольник.

2. Если в плоскости прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M, то



$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2.$$

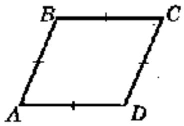
ТАБЛИЦА 37. РОМБ



В параллелограм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Точки касания вписанной в ромб окружности являются вершинами прямоугольника.

Слово «ромб» греческого происхождения. Оно означало в давние времена любое круглое или вращающееся тело.



Определение

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны.

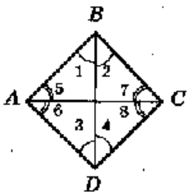
Свойства

1. Ромб имеет два свойства параллелограмма.

2. Все стороны ромба равны.

$AB = BC = CD = AD.$

3. Диагонали ромба перпендикулярны.



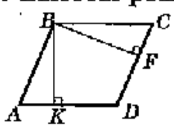
$AC \perp BD.$

4. Диагонали ромба лежат на биссектрисах его углов.

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4;$

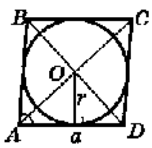
$\angle 5 = \angle 6 = \angle 7 = \angle 8.$

5. Высоты ромба равны.



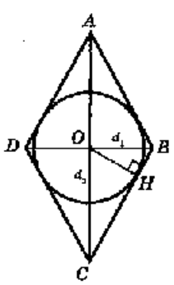
$BK = BF.$

6. В любой ромб можно вписать окружность.



$$r = \frac{h}{2} = \frac{a \sin A}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}.$$

7. Точка касания вписанной окружности делит сторону на отрезки, связанные с диагоналями и радиусом вписанной окружности соотношениями:



$d_1 = 2\sqrt{BH \cdot BC};$

$d_2 = 2\sqrt{CH \cdot BC};$

$r = \sqrt{BH \cdot CH}.$

Признаки

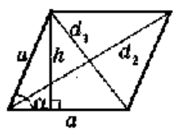
Если в четырехугольнике
- все стороны равны
- диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам,

то это ромб.

Если в параллелограмме
- диагонали взаимно перпендикулярны,
- диагональ лежит на биссектрисе его угла,
- высоты равны

то это ромб.

Площадь ромба



Площадь ромба равна:

• произведению сторон и высоты ромба.

$S = ah.$

• произведению квадрата его стороны на синус угла ромба.

$S = a^2 \sin \alpha.$

• половине произведения его диагоналей.

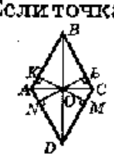
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

• удвоенному произведению стороны на радиус окружности, вписанной в ромб.

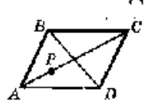
$S = 2ar.$

Дополнительные свойства

1. Если точка пересечения диагоналей четырехугольника равноудалена от его сторон, то этот четырехугольник является ромбом.



2. Если на диагонале AC ромба $ABCD$ взята точка P, то



$AP \cdot CP = AB^2 - PB^2.$

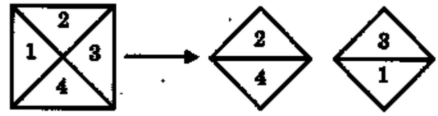
ТАБЛИЦА 38. КВАДРАТ

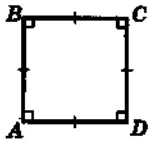
Из всех прямоугольников одного и того же периметра квадрат имеет наибольшую площадь.

Из всех прямоугольников определенной площади квадрат имеет наименьший периметр.

Слово «квадрат» происходит от латинского «gudratus» — четырехугольник. Квадрат был первым четырехугольником, который рассматривался в геометрии.

Любой квадрат можно разрезать на два равных квадрата.





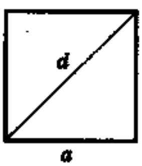
Определение

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны (ромб, у которого углы прямые).

Свойства

1. Квадрат имеет все свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба.

2. Периметр квадрата в четыре раза больше его стороны.

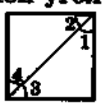


$P = 4a.$

3. Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше его стороны.

$d = a\sqrt{2}.$

4. Диагональ квадрата образует с каждой стороной угол в 45°.

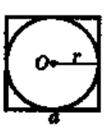


$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 45°.$

5. Около любого квадрата можно описать окружность.

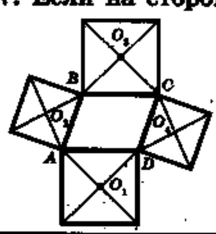
$R = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{d}{2}.$

6. В любой квадрат можно вписать окружность.



$r = \dfrac{a}{2}.$

7. Если на сторонах параллелограмма за ним построить квадраты, то центры квадратов будут вершинами квадрата.



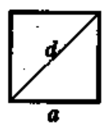
$O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

Признаки

Если в ромбе: один угол прямой, / диагонали равны, / соседние углы равны, — то это квадрат.

Если в прямоугольнике: соседние стороны равны, / диагонали перпендикулярны, / диагонали являются биссектрисами его углов, — то это квадрат.

Площадь квадрата



Площадь квадрата равна:

- квадрату его стороны.

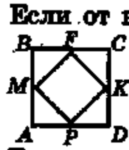
$S = a^2.$

- половине квадрата его диагонали.

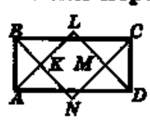
$S = \dfrac{1}{2}d^2.$

Дополнительные свойства

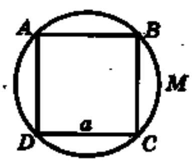
1. Если от вершин A, B, C, D квадрата $ABCD$ на его сторонах отложить равные отрезки AM, BF, CK, DP, то $PMFK$ — квадрат.



2. Точки пересечения биссектрис всех углов прямоугольника являются вершинами квадрата. $KLMN$ — квадрат.



3. Сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата, вписанного в окружность, есть величина постоянная.



$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2,$

где a — длина стороны квадрата.

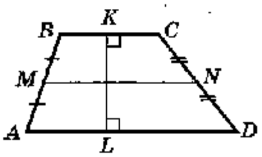
ТАБЛИЦА 39. ТРАПЕЦИЯ

Трапеция встречается впервые у греческого математика Посидония (I в.).

О том, что средняя линия трапеции равна половине суммы ее оснований, было известно еще древним египтянам (не позже II в. до н.э.).

Слово «трапеция» — греческое. Оно когда-то означало «столик». Этот термин и слово «трапеза» имеют общее происхождение, слово «трапеза» дословно означает «застолье».

Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон плюс удвоенное произведение ее оснований.



Определение

Трапеция — четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. $AD \parallel BC$, $AB \nparallel CD$.

AD, BC — **основания**; AB, CD — **боковые стороны.**

Средняя линия — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Высота трапеции — перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания на другое или его продолжение (расстояние между прямыми оснований).

Свойства

1. Основания трапеции параллельны.

$$AD \parallel BC.$$

2. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований.

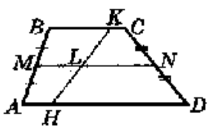
$$MN \parallel BC, MN \parallel AD,$$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}.$$

3. Сумма углов, прилегающих к боковой стороне, равна 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180°.$$

4. Средняя линия делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, проведенных через основания, пополам.



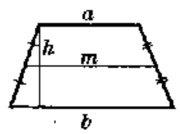
$$KL = LH.$$

Признаки

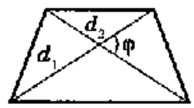
Если в четырехугольнике — сумма углов, прилегающих к одной стороне, равна 180°, а сумма углов, прилегающих к соседней стороне, не равна 180°, — то он будет трапецией.

Площадь трапеции

Площадь трапеции равна:

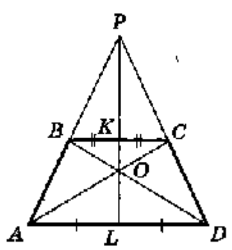


- произведению полусуммы оснований на высоту трапеции. $S = \frac{a + b}{2} \cdot h.$
- произведению средней линии трапеции на ее высоту. $S = mh.$



- полупроизведению ее диагоналей на синус угла между ними. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$

Дополнительные свойства

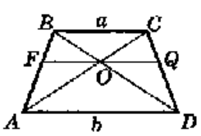


1. Середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.
2. Треугольники, образованные боковыми сторонами и отрезками диагоналей, равновелики.

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}.$$

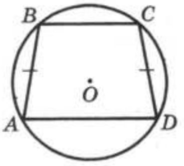
3. Треугольники, образованные основаниями и отрезками диагоналей, подобны. $\Delta BOC \sim \Delta DOA$, $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OD} = \frac{a}{b}$; $\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta DOA}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$

4. Отрезок параллелен основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей.



$$OF = OQ = \frac{ab}{a + b}, \quad FQ = \frac{2ab}{a + b}.$$

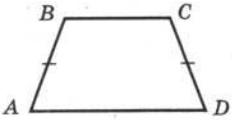
ТАБЛИЦА 40. РАВНОБОКАЯ ТРАПЕЦИЯ



Окружность можно описать около трапеции тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Если в равнобокую трапецию можно вписать окружность, то ее боковая сторона равна средней линии.

Если равнобокая трапеция описана около окружности, то проекция ее диагонали на большее основание равна средней линии.



Определение

Равнобокая (равнобедренная) трапеция — трапеция с равными боковыми сторонами.

Свойства

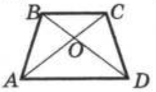
1. Равнобокая трапеция имеет все свойства трапеции.
2. Боковые стороны равны.

$AB = CD.$

3. Углы при одном основании равны.

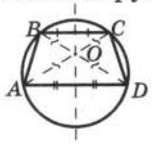
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle C.$

4. Диагонали равнобокой трапеции равны.



$AC = BD.$

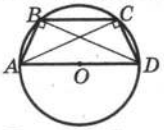
5. Около любой равнобокой трапеции можно описать окружность.



$AO = BO = CO = DO = R.$

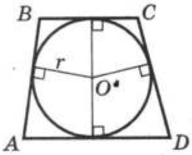
Вписать в окружность можно только равнобокую трапецию.

6. Если центр окружности, описанной около трапеции, лежит на основании трапеции, то ее диагональ перпендикулярна боковой стороне.



$\angle ABD = \angle ACD = 90°.$

7. В равнобокую трапецию можно вписать окружность, если боковая сторона равна средней линии трапеции.



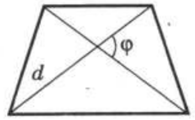
$AB = \dfrac{BC + AD}{2}$, 2r = h.

Признаки

Если в трапеции	углы при одном основании равны	то это равнобокая трапеция.
	диагонали равны	

Площадь равнобокой трапеции

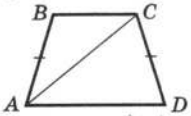
Площадь равнобокой трапеции равна



- полупроизведению квадрата диагонали на синус угла между ними. $S = \dfrac{1}{2}d^2 \sin\varphi.$

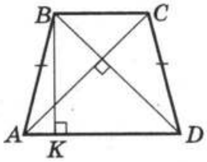
Дополнительные свойства

1. В равнобокой трапеции квадрат длины диагонали равен квадрату длины боковой стороны, к которой добавлено произведение длин оснований.



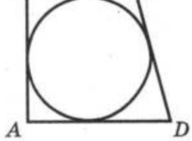
$AC^2 = AB^2 + AD \cdot BC.$

2. Если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то длина высоты трапеции равна длине средней линии, а площадь равна квадрату ее высоты.



$BK = \dfrac{BC + AD}{2}$, $S = BK^2.$

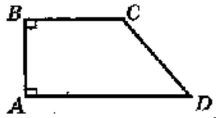
ТАБЛИЦА 41. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ



Окружность можно вписать в трапецию тогда и только тогда, когда сумма боковых сторон трапеции равна сумме оснований.

Если в трапецию вписана окружность, то из ее центра боковые стороны трапеции видно под прямым углом.

Площадь описанной прямоугольной трапеции равна произведению ее оснований.



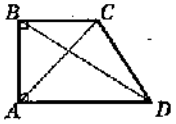
Определение

Прямоугольная трапеция — трапеция, в которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

Свойства

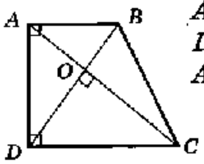
1. Прямоугольная трапеция имеет все свойства трапеции.

2. Разность квадратов диагоналей прямоугольной трапеции равна разнице квадратов ее оснований.



$BD^2 - AC^2 = AD^2 - BC^2.$

3. Если в прямоугольной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны ($AB \parallel DC$, $AD \perp DC$), то:



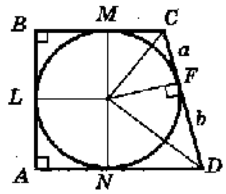
$AB^2 = OB \cdot DB$; $AD^2 = OD \cdot DB$;
$DC^2 = OC \cdot AC$; $AD^2 = OA \cdot AC$;
$AO^2 = DO \cdot OB$; $DO^2 = AO \cdot OC$;

$$\left(\frac{BD}{AC}\right)^2 = \frac{AB}{DC}.$$

4. Сумма квадратов диагоналей прямоугольной трапеции равна сумме квадратов оснований трапеции и удвоенного квадрата высоты этой трапеции.

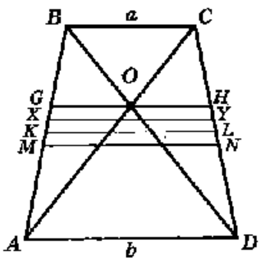
$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB^2.$$

5. Если в прямоугольной трапеции точка касания вписанной окружности делит большую боковую сторону на отрезки a и b, то:



$AB = 2\sqrt{ab}$,
$BC = a + \sqrt{ab}$,
$CD = a + b$,
$AD = b + \sqrt{ab}$.

ТАБЛИЦА 42. ТИПИЧНЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ ПРИ НАХОЖДЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАПЕЦИИ



XY параллелен основаниям и делит трапецию на две подобные трапеции. $XY = \sqrt{ab}$.

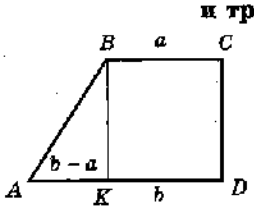
GH проходит через O и параллелен основаниям. $GH = \dfrac{2ab}{a+b}$.

KL — средняя линия трапеции. $KL = \dfrac{a+b}{2}$.

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

MN параллелен основаниям и делит трапецию на две равновеликие части. $MN = \sqrt{a^2+b^2}$

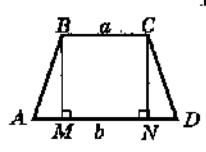
Разбитие трапеции на параллелограмм и треугольник



Дополнительное построение: $BK \parallel CD$. $BCDK$ — параллелограмм.

$AK = b - a$.

Разбитие трапеции на прямоугольник и два треугольника

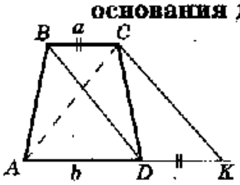


Дополнительное построение: $BM \perp AD, CN \perp AD$. $MBCN$ — прямоугольник. $AM + ND = b - a$.

Если $ABCD$ — равнобокая, то

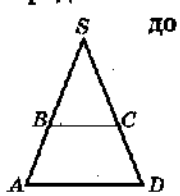
$$AM = ND = \frac{b-a}{2},\quad AN = DM = \frac{a+b}{2}.$$

Отложение на продолжении одного основания другого основания



Дополнительное построение: $AK \parallel BC, DK = BC$. $AK = b + a$, $BD \parallel CK, BD = CK$.

Продолжение боковых сторон трапеции до их пересечения



Дополнительное построение: продолжим лучи AB и DC до пересечения их в точке S.

ТАБЛИЦА 43. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Из всех четырехугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

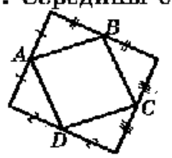
Из всех четырехугольников, описанных около одной и той же окружности, наименьшую площадь имеет квадрат.

Если стороны, периметр и площадь произвольного четырехугольника равны соответственно a, b, c, d, 2p, S, то

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\angle B + \angle D}{2}.$$

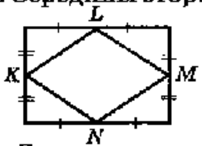
Свойства середин сторон четырехугольника

1. Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



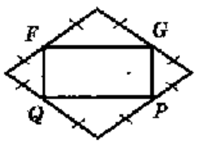
$ABCD$ — параллелограмм.

2. Середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.



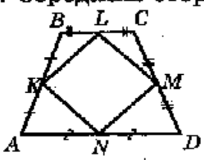
$KLMN$ — ромб.

3. Середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.



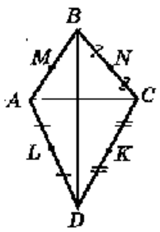
$FGPQ$ — прямоугольник.

4. Середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.



$KLMN$ — ромб.

5. Если отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырехугольника, равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

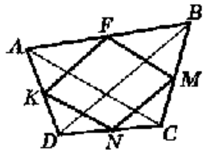


Если $KM = LN$ $(AL = LD,$ $DK = KC, CN = NB, BM = MA)$, то $AC \perp BD$.

6. Если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны.
Если $KM \perp LN$ $(AL = LD, DK = KC, CN = NB,$ $BM = MA)$, то $AC = BD$.

7. Отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого треугольника, и отрезки, соединяющие середины диагоналей, пересекаются в одной точке.

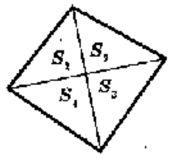
8. В выпуклом четырехугольнике сумма квадратов диагоналей вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон.



$$FN^2 + MK^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2).$$

Площадь четырехугольника

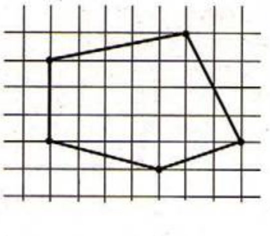
1. Если выпуклый четырехугольник разделен своими диагоналями на треугольники, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4, то $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.



2. Площади выпуклых четырехугольников, у которых середины сторон совпадают, равны.

3. Если диагональ выпуклого четырехугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырехугольника.

4. Если диагональ выпуклого четырехугольника делит пополам отрезок, соединяющий середины двух противолежащих сторон этого четырехугольника, то эта диагональ делит пополам и площадь четырехугольника.



Если вершины многоугольника лежат в узлах бумаги в клетку, причем в середине многоугольника лежит n узлов, а на границе многоугольника m узлов, то его площадь равна

$$n+\frac{m}{2}-1 \text{ (формула Пика).}$$

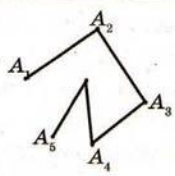
Две фигуры называют равносоставными, если разрезав одну из них определенным образом на одинаковое число частей, можно сложить из них другую фигуру.

Обозначения вершин многоугольников буквами ввели еще древние греки.

Два многоугольника одинаковой площади равносоставные.

Каждый многоугольник равносоставен с определенным прямоугольником.

Определение

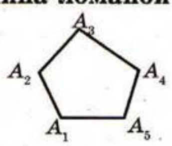


Ломаная $A_1A_2A_3...A_n$ — фигура, состоящая из точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n и отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, которые их соединяют. Точки A_1, A_2, ..., A_n называют **вершинами ломаной**, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — **звеньями ломаной.**

Простая ломаная — ломаная, не имеющая точек самопересечения.

Замкнутая ломаная — ломаная, концы которой соединяются.

Длина ломаной — сумма длин ее звеньев.



Многоугольник — простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой; вершины ломаной называют **вершинами многоугольника**, а звенья ломаной — **сторонами многоугольника.** Многоугольник с n вершинами (n сторонами) называют **n-угольником.**

Диагональ многоугольника — отрезки, соединяющие несоседние вершины мноугольника.

A_1A_3 и A_2A_4 — диагонали.

Выпуклый многоугольник — многоугольник, лежащий в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

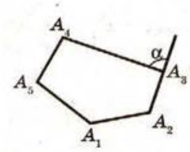
$A_1A_2A_3A_4A_5$ — выпуклый пятиугольник;

$B_1B_2B_3B_4B_5$ — невыпуклый пятиугольник.

Угол выпуклого многоугольника при данной вершине — угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине. $\angle A_1A_2A_3$, $\angle A_2A_3A_4$, $\angle A_3A_4A_1$, $\angle A_4A_1A_2$ — углы многоугольника.

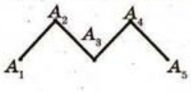
Внешний угол выпуклого многоугольника при данной вершине — угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине.

α — внешний угол пятиугольника при вершине A_3.



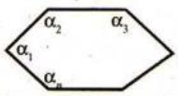
Свойства

1. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.



$$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_5 \geq A_1A_5.$$

2. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.



$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=180°(n-2).$$

3. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

$$\beta_1+\beta_2+...+\beta_n=360°.$$

ТАБЛИЦА 45. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Число прямых углов выпуклого n-угольника при $n > 4$ меньше четырех.

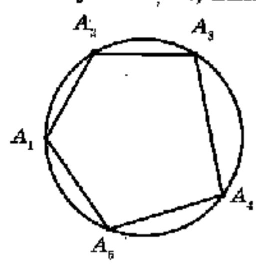
В геометрии рассматривают также невыпуклые многоугольники, так называемые звездчатые.

Интересно знать, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.

Из всех n-угольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.

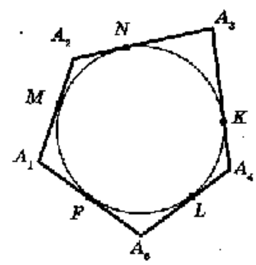
Определение

Многоугольник, вписанный в окружность, — многоугольник, все вершины которого лежат на некоторой окружности.



$A_1A_2A_3A_4A_5$ — вписанный пятиугольник (окружность, описанная около пятиугольника).

Многоугольник, описанный около окружности, — многоугольник, все стороны которого касаются к некоторой окружности.



$A_1A_2A_3A_4A_5$ — описанный пятиугольник (окружность, вписанная в пятиугольник). M, N, K, L, F — точки касания.

Свойства

1. Центр окружности, описанной около многоугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров сторон.

OM, OK, OL, ON, OF — серединные перпендикуляры сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 соответственно.

2. Радиус окружности, описанной около многоугольника, вычисляется как радиус окружности, описанной около треугольника, определяющегося любыми тремя вершинами данного многоугольника.

$R = OA = OB = OC$.

3. Теорема Паскаля

Если шестиугольник вписан в окружность и противолежащие его стороны не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой.

4. Центр окружности, вписанной в многоугольник, — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5 — биссектрисы углов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 соответственно.

5. Радиус окружности, вписанной в многоугольник, вычисляется по формуле:

$$r = \frac{S}{p},$$ где S — площадь многоугольника, p — полупериметр многоугольника.

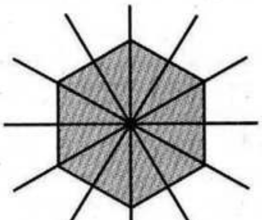
6. Расстояния от любой вершины многоугольника до точек касания сторон, выходящих из этой вершины, равны:

$A_2M = A_2N$, $A_3N = A_3K$, $A_4K = A_4L$, $A_5L = A_5F$, $A_1F = A_1M$.

7. Теорема Брианшона

Если шестиугольник описан около окружности, то прямые, соединяющие его противолежащие вершины, пересекаются в одной точке.

ТАБЛИЦА 46. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

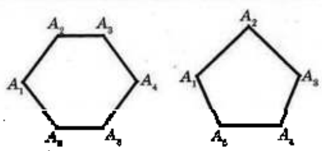


Карл Гаусс впервые доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный 17-угольник.

Учение о правильных многоугольниках систематизировал и развил Эвклид и изложил его в 2-й книге своих «Начал».

Карл Гаусс (1777–1855)

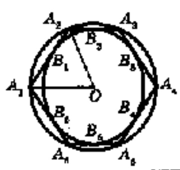
Определение



Правильный многоугольник — выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны.

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильный шестиугольник,

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильный пятиугольник.



Центр правильного многоугольника — центр вписанной окружности и центр описанной окружности.

Центральный угол многоугольника — угол, под которым видно сторону правильного многоугольника из его центра.

$\angle A_1OA_2$ — центральный угол правильного шестиугольника.

Свойства

1. Любой правильный многоугольник можно вписать в окружность и описать около нее, причем центры этих окружностей совпадают.

2. Радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}},$$ где a — сторона многоугольника, n — количество сторон (углов).

3. Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}},$$ где a — сторона многоугольника.

4. Сторону правильного многоугольника можно вычислить по формуле:

$$a = 2r\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n},\quad a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

где R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей, n — количество сторон (углов) правильного многоугольника.

5. Площадь правильного n-угольника можно вычислить по формуле:

$$S = r^2 n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n};\quad S = \frac{a^2 n}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}};$$

$$S = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

где R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей, a — длина стороны.

6. Правильные выпуклые n-угольники подобны. Если у них стороны одинаковы, то они равны.

7. У правильных n-угольников отношение периметров, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны. $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

8. Площади правильных n-угольников относятся как квадраты их сторон (соответствующих линейных размеров). $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$.

9. Соотношение между стороной правильного многоугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей (отдельные случаи):

	r через a	R через a	a через r	a через R
треугольник	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$a = 2\sqrt{3}r$	$a = \sqrt{3}R$
квадрат	$r = \frac{a}{2}$	$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$a = 2r$	$a = \sqrt{2}R$
шестиугольник	$r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$R = a$	$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$	$a = R$

10. Площади правильных многоугольников (отдельные случаи):

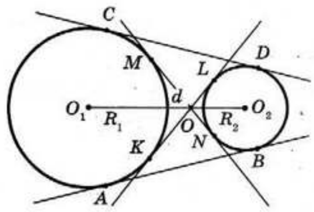
	через a	через r	через R
треугольник	$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$S = 3\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$
четырехугольник	$S = a^2$	$S = 4r^2$	$S = 2R^2$
шестиугольник	$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = 2\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$

ТАБЛИЦА 47. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ. ОБЩИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Сотни лет астрономы считали, что планеты двигаются по окружностям. Эту ошибку опровергли Коперник, Галилей, Каплер и Ньютон.

Определение касательной как прямой, имеющей с окружностью только одну общую точку, впервые встречается в учебнике «Элементы геометрии» Лежандра (1752–1833).

Если расстояние d между центрами двух окружностей больше суммы ($R_1 + R_2 < d$) или меньше разности ($R_1 - R_2 > d$) их радиусов, то **окружности не имеют общих точек.**



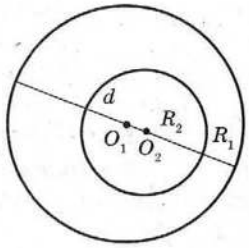
CD, AB — внешние касательные;
$AB = CD$;
MN, KL — внутренние касательные;
$MN = KL$.

$R_1 + R_2 < d$;

$AB^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2, KL^2 + (R_1 + R_2)^2 = d^2$;

$$OO_1 = \frac{R_1 d}{R_1 + R_2},\ \ OO_2 = \frac{R_2 d}{R_1 + R_2}.$$

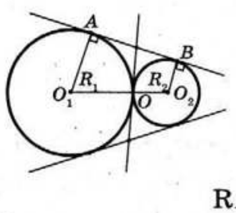
Имеют четыре общие касательные.



$R_1 - R_2 = d$.

Общих касательных окружности не имеют.

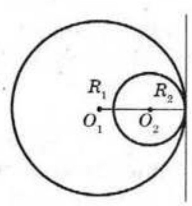
Если расстояние d между центрами двух окружностей равно сумме ($R_1 + R_2 = d$) или разности ($R_1 - R_2 = d$) их радиусов, то **окружности касаются (внешним или внутренним образом).**



Внешнее касание — касание двух окружностей, центры которых лежат по разные стороны от их общей касательной.

$R_1 + R_2 = d, AB^2 = 4R_1R_2$.

Имеет три общих касательных.

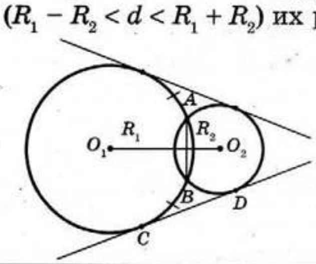


Внутреннее касание — касание двух окружностей, центры лежат по одну сторону от их общей касательной.

$R_1 - R_2 = d$.

Одна общая касательная.

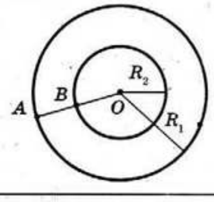
Если расстояние d между центрами двух окружностей больше разности, но меньше суммы ($R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$) их радиусов, то **окружности имеют две общих точки (имеют общую хорду).**



$CD^2 + (R_1 - R_2)^2 = d^2$;

$$AB = \frac{4S_{\Delta O_1AO_2}}{d}.$$

$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$;



Концентрические окружности — две окружности, имеющие общий центр.

$AB = R_1 - R_2$;

$d = 0$.

ТАБЛИЦА 48. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ДЛИНА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

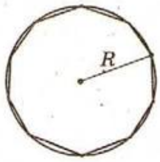
Слово «сектор» происходит от латинского и означает, «отсекающий». Этот термин применил еще Эвклид.

Знак l, который используется для обозначения длины дуги окружности, является первой буквой латинского слова «longitudo» — длина.

Знак π для обозначения отношения длины окружности к диаметру ввел в 1706 г. английский математик В. Джонс.

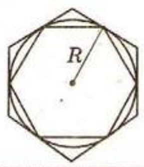
Слово «сегмент» латинского происхождения и означает «отрезок».

Определение



Длина окружности — граница, к которой приближается периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

$C = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$.



Площадь круга — граница, к которой приближаются площади правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности, при неограниченном увеличении числа сторон многоугольника. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S'_n$.

Длина окружности

1. Отношение длины окружности C к ее диаметру $2R$ одинаково для всех окружностей и равно π:

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

2. Длину окружности можно вычислить по формуле:

$$C = 2\pi R = \pi d,$$

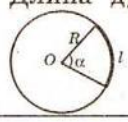
где C — длина окружности, R — радиус окружности, d — диаметр окружности.

Длина дуги окружности

1. Длина дуги, соответствующей центральному углу в $n°$:

$$l = \frac{2\pi R}{360°}\cdot n° = \frac{\pi R n°}{180°}.$$

2. Длина дуги, соответствующей центральному углу в α радиан:



$$l = \frac{2\pi R}{2\pi}\cdot \alpha = R\alpha.$$

Площадь круга

Площадь круга S, радиус которого равен R, можно вычислить по формуле:

$$S = \pi R^2 = \pi\frac{d^2}{4},$$ где d — диаметр круга.

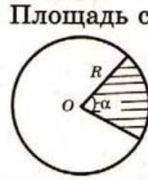
Площадь кругового сектора

Круговой сектор — часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

1. Площадь сектора, соответствующего центральному углу в $n°$:

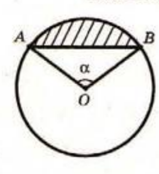
$$S = \frac{\pi R^2}{360°}\cdot n°.$$

2. Площадь сектора, соответствующего центральному углу в α радиан:

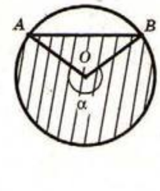


$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot \alpha = \frac{R^2\alpha}{2}.$$

Площадь кругового сегмента



Круговой сегмент — общая часть круга и полуплоскости.



Площадь сегмента, не равная полукругу, вычисляется по формуле:

$$S = S_{\text{кр.сек.}} \mp S_{\Delta AOB}$$

(если $\alpha < 180°$, знак «−», если $\alpha > 180°$, знак «+»).

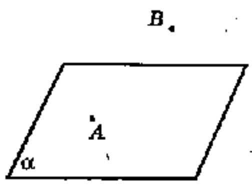
Термин «стереометрия» встречается еще у Архимеда.

Греческий ученый Эвклид впервые привел материал по стереометрии в стройную систему (11–13 книги «Начал»).

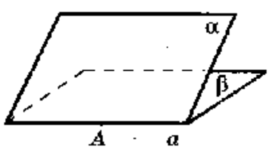
Аксиомы стереометрии

1. Какой бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

$A \in \alpha, B \notin \alpha.$

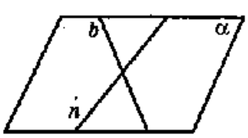


2. Если две разные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.



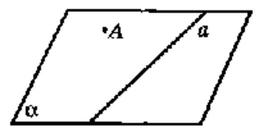
Если $A \in \alpha$, $A \in \beta$, то α и β пересекаются по прямой a, причем $A \in a$.

3. Если две разные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну.

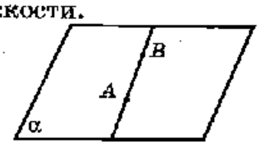


Следствия из аксиом стереометрии

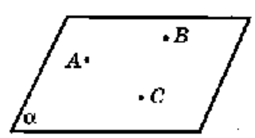
1. Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость и притом только одну.



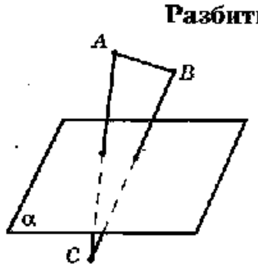
2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.



3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.



Разбиение пространства плоскостью на два полупространства

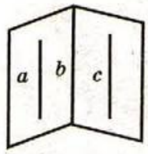


Плоскость разбивает пространство на два полупространства.

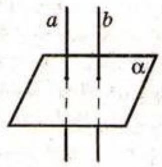
Если точки A и B принадлежат одному полупространству, то отрезок AB не пересекает плоскость.

Если же точки A и C принадлежат разным полупространствам, то отрезок AC пересекает плоскость.

ТАБЛИЦА 50. ВЗАИМНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

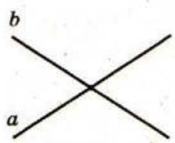


Две прямые (a и c) параллельны, если плоскости, проведенные через эти прямые, пересекаются по прямой (b), не пересекающей ни одну из этих прямых.



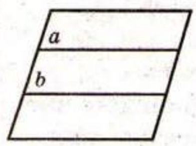
Две прямые параллельны, если каждая плоскость, пересекающая одну из этих прямых, пересекает и другую прямую.

Определение



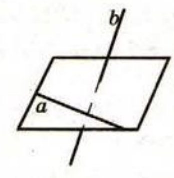
Две пересекающиеся прямые — две прямые, имеющие только одну общую точку.

Прямые a и b пересекаются.



Параллельные прямые — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек.

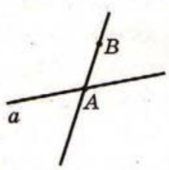
Прямые a и b параллельны: $a \parallel b$.



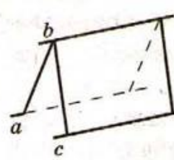
Непересекающиеся прямые — две прямые, не лежащие в одной плоскости.

Прямые a и b непересекающиеся.

Признаки

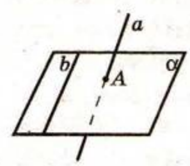


Если одна точка принадлежит данной прямой, а другая точка лежит за ней, то данная прямая и прямая, проходящая через эти точки, пересекаются.



Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

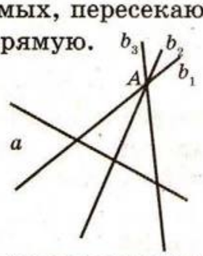
Если $a \parallel b, c \parallel b$, то $a \parallel c$.



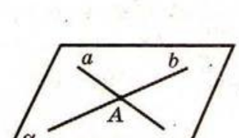
Если одна прямая лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые непересекающиеся.

Свойства

1. Через точку вне данной прямой можно провести множество прямых, пересекающих данную прямую.



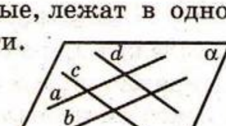
2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.



1. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную ей, притом только одну.

2. Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.

3. Все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.



1. Через точку вне данной прямой можно провести множество прямых, непересекающихся с данной прямой.

2. Для любых двух непересекающихся прямых в пространстве существует третья прямая, непересекающаяся с каждой из данных двух прямых.

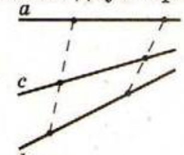
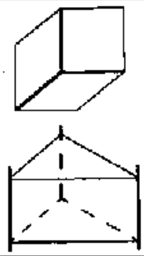
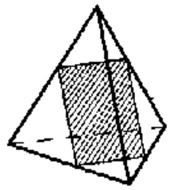


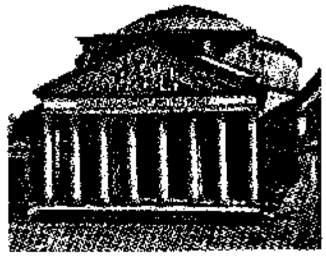
ТАБЛИЦА 51. ВЗАИМНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ



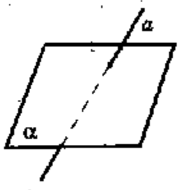
Если три плоскости попарно пересекаются, то линии их пересечения или пересекаются в одной точке, или параллельны.



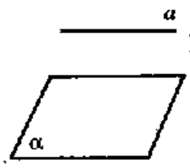
Любой срез тетраэдра плоскостью, параллельной двум непересекающимся ребрам, является параллелограммом.



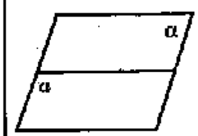
Определение



Прямая, пересекающая плоскость, — прямая, имеющая только одну общую точку с плоскостью. Прямая a и плоскость α пересекаются.

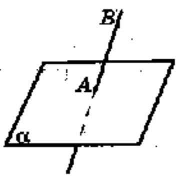


Прямая, параллельная плоскости, — прямая, не имеющая общих точек с плоскостью. Прямая a параллельна плоскости α, $a \parallel \alpha$.

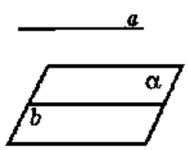


Прямая, лежащая в плоскости, — прямая, каждая точка которой принадлежит плоскости. Прямая a лежит в плоскости α. $a \subset \alpha$.

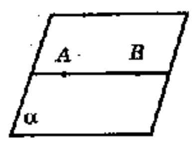
Признаки



Если одна точка лежит в плоскости, а другая точка не лежит в этой плоскости, то прямая, проходящая через эти точки, пересекает плоскость.



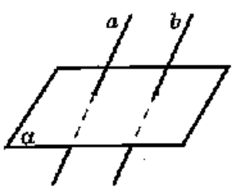
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.



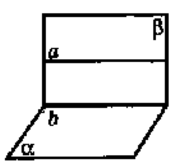
Если две точки прямо принадлежат некоторой плоскости, то прямая лежит в этой плоскости.

Свойства

1. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

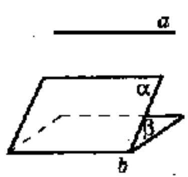


2. Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

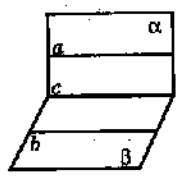


1. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

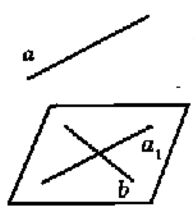
Если $a \parallel \alpha, a \subset \beta$, то $a \parallel b$.



2. Если прямая параллельна двум плоскостям, которые пересекаются и которым не принадлежит данная прямая, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.



1. Если через каждую из двух параллельных прямых провести пересекающиеся плоскости, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна каждой из данных прямых.

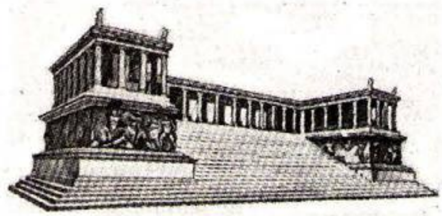


2. Через любую из двух непересекающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

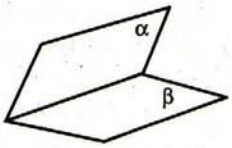
ТАБЛИЦА 52. ВЗАИМНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если две плоскости не параллельны, то любая плоскость пересекает хотя бы одну из этих плоскостей.

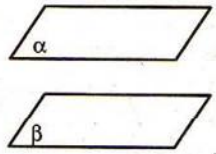
*Прямая **a** и плоскость α параллельны, если каждая плоскость, пересекающая прямую **a**, пересекает и плоскость α.*



Определение

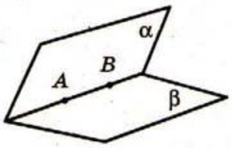


Две пересекающиеся плоскости — две разные плоскости, имеющие общие точки. Плоскости α и β пересекаются.

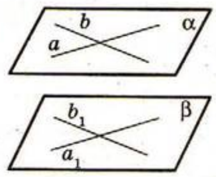


Параллельные плоскости — плоскости, не имеющие общих точек.
Плоскости α и β параллельны:
$\alpha \parallel \beta$.

Признаки

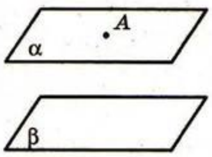


Если две разные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

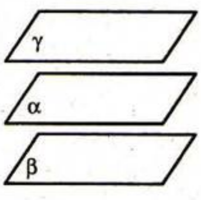


Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
Если $a \parallel a_1, b \parallel b_1, a \subset \alpha, b \subset \alpha, a_1 \subset \beta, b_1 \subset \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

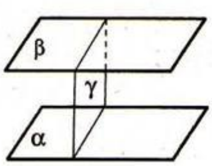
Свойства параллельных плоскостей



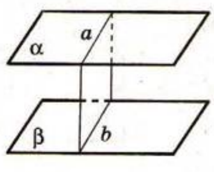
1. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.



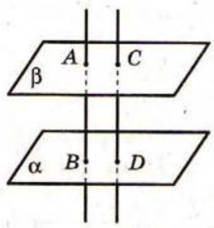
2. Если две разные плоскости параллельны третьей плоскости, то они параллельны между собой.
Если $\alpha \parallel \beta, \alpha \parallel \gamma$, то $\beta \parallel \gamma$.



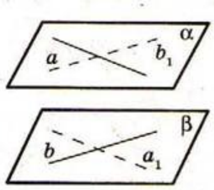
3. Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.



4. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
Если $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel b$.



5. Отрезки параллельных прямых, расположенных между двумя параллельными плоскостями, равны.
Если $\alpha \parallel \beta, AB \parallel CD$, то $AB = CD$.



6. Через две непересекающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости.

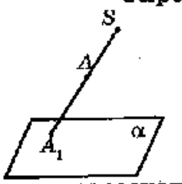
ТАБЛИЦА 53. ЦЕНТРАЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Гаспар Монж (1746–1818)

Родоначальником начертательной геометрии считают Гаспара Монжа.

Начертательная геометрия — раздел геометрии, в котором пространственные формы и соответствующие геометрические отношения изучают с помощью изображений на плоскости (эпюров).

Определение



Центральная проекция точки относительно точки S на плоскость — точка пересечения прямой, проходящей через точку S и данную точку, с плоскостью.

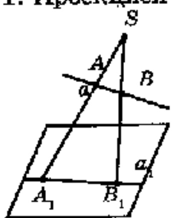
Проекцией точки A относительно точки S на плоскость α есть точка A_1.

S — центр проектирования,

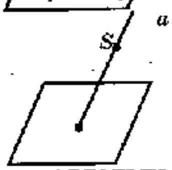
α — плоскость проекции.

Свойства

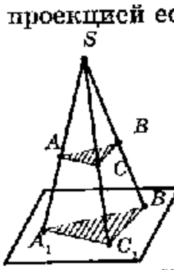
1. Проекцией точки есть точка.



2. Проекцией прямой, не проходящей через центр проектирования, есть прямая.

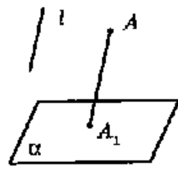


3. Если прямая проходит через центр проектирования и не параллельна плоскости, то ее проекцией есть точка.



4. Проекцией плоского многоугольника есть многоугольник с тем же числом сторон, причем если точка принадлежит многоугольнику, то ее проекция лежит на проекции многоугольника.

Определение

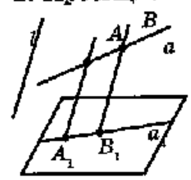


Параллельная проекция точки на плоскость в направлении прямой l, не параллельной плоскости, — точка пересечения прямой, параллельной или совпадающей с прямой l, и плоскости проекции.

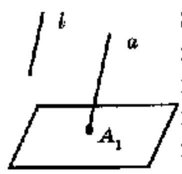
Проекцией точки A в направлении прямой l на плоскость α есть точка A_1.

Свойства

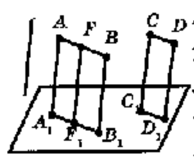
1. Проекцией точки есть точка.



2. Проекцией прямой, не параллельной проектирующей прямой, есть прямая.



3. Если прямая параллельна проектирующей прямой, то ее проекцией есть точка.

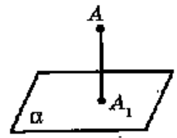


4. Параллельные прямые, не лежащие в плоскости, параллельной линии проектирования, проектируются в параллельные прямые.

5. Отношения отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняются.

$$\frac{AF}{FB}=\frac{A_1F_1}{F_1B_1};\ \frac{AB}{CD}=\frac{A_1B_1}{C_1D_1}.$$

Определение



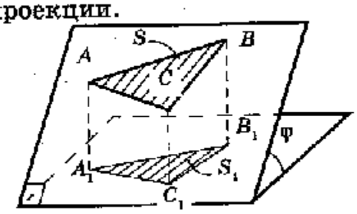
Ортогональная проекция точки на плоскость — точка пересечения перпендикуляра, проведенного через данную точку к плоскости, и самой плоскости.

Ортогональной проекцией точки A на плоскость α есть точка A_1.

Свойства

1. Имеет все свойства параллельного проектирования.

2. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.



$$S_1 = S\cdot\cos\varphi,$$

где S — площадь многоугольника, S_1 — площадь проекции многоугольника, φ — угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

ТАБЛИЦА 54. ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ ФИГУР ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

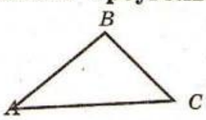
Блез Паскаль (1623–1662)

Проекционная геометрия — раздел геометрии, изучающий свойства фигур при проекционных преобразованиях.

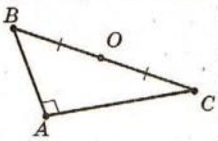
Неоценимый вклад в развитие проекционной геометрии внесли труды Б. Паскаля и Ж. Десарга.

Параллельные проекции некоторых плоских фигур

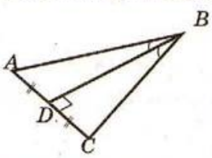
Любой треугольник (включая прямоугольный, равнобедренный, равносторонний) изображается произвольным треугольником.



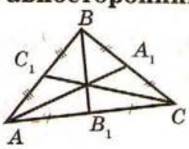
Прямоугольный треугольник изображается произвольным треугольником, у которого центр окружности, описанной около него, — середина гипотенузы.



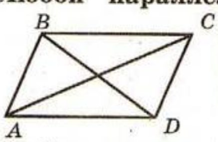
Равнобедренный треугольник изображается произвольным треугольником, у которого медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой этого треугольника.



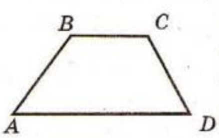
Равносторонний треугольник изображается произвольным треугольником, у которого центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника.



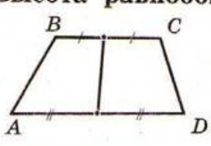
Любой параллелограмм (включая прямоугольник, квадрат, ромб) изображается произвольным параллелограммом.



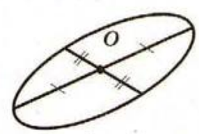
Любая трапеция (включая равнобокую, прямоугольную) изображается произвольной трапецией (с сохранением отношений длин оснований).



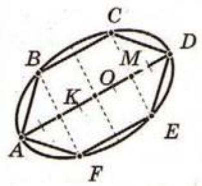
Высота равнобокой трапеции изображается отрезком, соединяющим середины ее оснований, или ему параллельным.



Окружность изображается в виде эллипса, центр окружности на изображении — точка пересечения сопряженных диаметров (два диаметра, каждый из которых делит пополам все хорды, параллельные второму диаметру) эллипса.

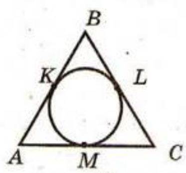


Правильный шестиугольник изображается в виде шестиугольника, две вершины которого — концы диаметра эллипса, а другие четыре вершины — концы хорд, проведенных параллельно сопряженному диаметру и делящих диаметр эллипса в отношении 1:2:1.

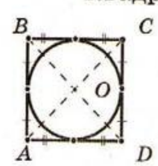


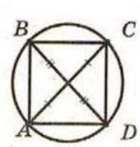
Изображения *n*-угольников и комбинаций с окружностью

Правильный треугольник и окружность.

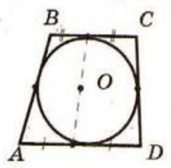


Квадрат и окружность.





Трапеция и окружность.



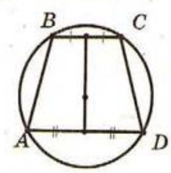
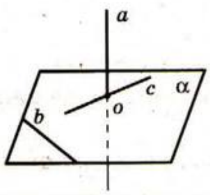


ТАБЛИЦА 55. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

*Если прямая b и плоскость β перпендикулярны одной и той же прямой **a**, то прямая **b** или параллельна плоскости β, или лежит в ней.*

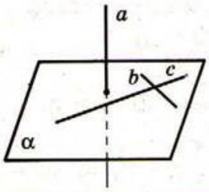
В 11-й книге «Начал» Эвклида рассматриваются вопросы параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.



Определение

Прямая, перпендикулярная плоскости, — прямая, перпендикулярная любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямая a, перпендикулярная плоскости α ($a \perp \alpha$), означает, что $a \perp b$, $a \perp c$, где $b \subset \alpha, c \subset \alpha$.

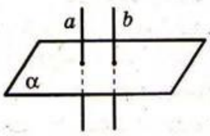


Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна двум прямым, лежащим в некоторой плоскости и пересекающимся, то она перпендикулярна данной плоскости.

Если $a \perp b, a \perp c, b \subset \alpha, c \subset \alpha$, то $a \perp \alpha$.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

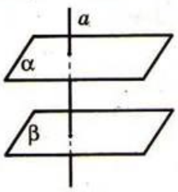


1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой.

Если $a \perp \alpha, a \parallel b$, то $b \perp \alpha$.

2. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Если $a \perp \alpha, b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.

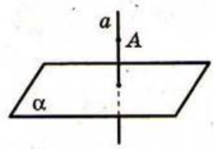


3. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и второй плоскости.

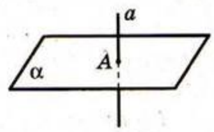
Если $\alpha \parallel \beta, a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$.

4. Если две разные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны.

Если $a \perp \alpha$, $a \perp \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

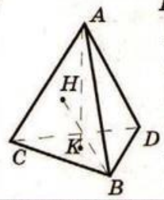


5. Через любую точку пространства можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.



6. Через любую точку прямой можно провести плоскость, перпендикулярную к ней, и к тому же только одну.

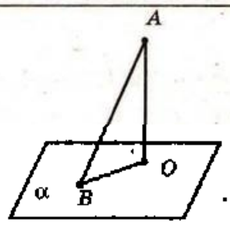
ТАБЛИЦА 56. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ. ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



В тетраэдре ABCD ребра AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AK \perp BCD$ и $BH \perp ACD$ и AK с BH пересекаются.

Теорема о трех перпендикулярах была доказана математиками Ближнего и Среднего Востока.

В Европе впервые сформулирована теорема о трех перпендикулярах Луи Бержраном, а доказана Лежандром (1794 г.).



Определение

Перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость, — отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.

Конец этого отрезка, который лежит в плоскости, называют **основанием перпендикуляра.**

Наклонная, проведенная из данной точки к плоскости, — любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к плоскости.

Конец отрезка, лежащий в плоскости, называют **основанием наклонной.**

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называют **проекцией наклонной.**

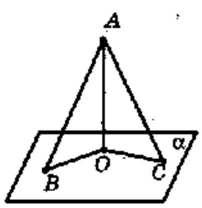
AO — перпендикуляр к плоскости α, AB — наклонная к плоскости α, BO — проекция наклонной AB на плоскость α.

Свойства

1. Перпендикуляр короче наклонной, проведенной из одной точки.

$$AO < AB.$$

2. Из данной точки, не принадлежащей плоскости, можно провести только один перпендикуляр к плоскости и множество наклонных.



3. Если из одной точки к одной плоскости проведен перпендикуляр и две наклонные, то:

• равные наклонные имеют равные проекции;

если $AB = AC$, то $BO = CO$.

• если проекции наклонных равны, то и сами наклонные равны;

если $BO = CO$, то $AB = AC$.

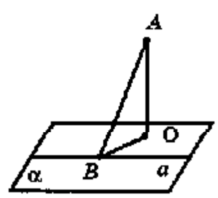
• большая наклонная имеет большую проекцию;

якщо $AB > AC$, то $BO > CO$.

• из двух наклонных больше та, которая имеет большую проекцию;

если $BO > CO$, то $AB > AC$.

Теорема о трех перпендикулярах



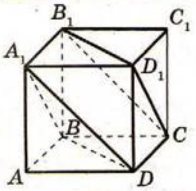
Если прямая, проведенная на плоскости, перпедикулярна ее проекции, то она сама перпендикулярна наклонной.

Если $a \perp BO$, то $a \perp AB$.

Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

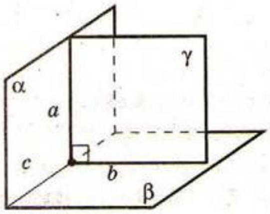
Если $a \perp AB$, то $a \perp BO$.

ТАБЛИЦА 57. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



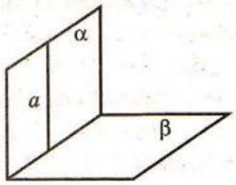
Диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскостям A_1BD и CB_1D_1.

*Если плоскость α и прямая a перпендикулярны плоскости β, то прямая **a** или параллельна плоскости α, или лежит в ней.*



Определение

Перпендикулярные плоскости — две плоскости, которые пересекаются, при условии, если третья плоскость, перпендикулярная линии их пересечения, пересекает их по перпендикулярным прямым. Плоскости α и β перпендикулярны ($\alpha \perp \beta$), если $\gamma \perp C$, γ пересекает α и β по прямым a и b, и $a \perp b$.



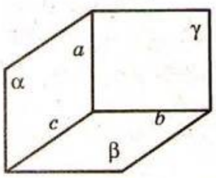
Признак перпендикулярности плоскостей

Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна второй плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

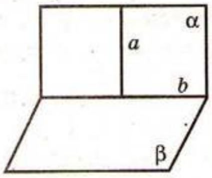
Если $a \subset \alpha, a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$.

Свойства перпендикулярных плоскостей

1. Любая плоскость, перпендикулярная прямой пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым. Если $\alpha \perp \beta$, $\gamma \perp c$, то $a \perp b$.

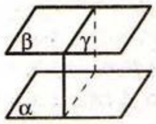


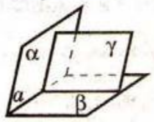
2. Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна прямой их пересечения, то она перпендикулярна и второй плоскости. Если $\alpha \perp \beta, a \perp b$, то $a \perp \beta$.



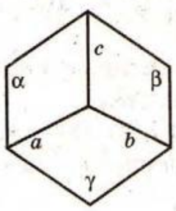
3. Через любую точку пространства можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, или параллельны, или пересекаются по прямой, перпендикулярной третьей плоскости.





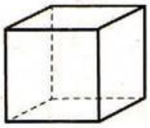
5. Три попарно перпендикулярные плоскости пересекаются по трем перпендикулярным прямым.



Если $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma, \gamma \perp \alpha$, то $a \perp b, b \perp c, a \perp c$.

6. Через данную прямую некоторой плоскости можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

ТАБЛИЦА 58. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ. ТРЕХГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

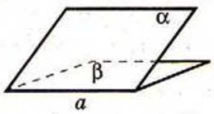


Понятия двугранного, трехгранного и многогранного углов берут начало с исследований геометрических форм разных кристаллов, из практики строительства разных сооружений.

А. Лежандр (1752–1833)

Общее доказательство того, что сумма плоских углов при вершине выпуклого многоугольника меньше 360°, сформулировал Лежандр.

Двугранные углы

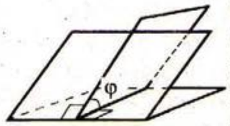


Двугранный угол — фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей прямой, ограничивающей их.

Полуплоскости называют **гранями,** а прямую, их ограничивающую, — **ребром** двугранного угла.

α и β — грани двугранного гла, a — его ребро.

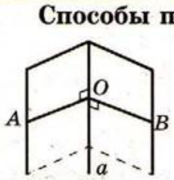
Линейный угол двугранного угла — угол, являющийся сечением этого двугранного угла и плоскости, перпендикулярной ребру (угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, которые лежат в гранях двугранного угла и имеют на ребре общее начало).



Мера двугранного угла — мера соответствующего ему линейного угла.

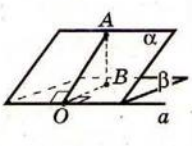
Мера двугранного угла находится в пределах от 0° до 180°. $0° < \varphi < 180°$.

Способы построения линейного угла



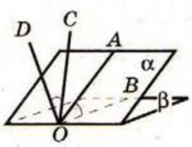
Через точку O ребра проводим соответственно в гранях $AO \perp a, BO \perp a$.

$\angle AOB$ — линейный угол.



Через точку A грани α проводим $AB \perp \beta$ и $AO \perp a$.

$\angle AOB$ или смежный с ним — линейный угол.

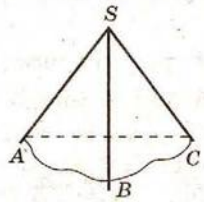


Через точку O проводим $OD \perp \alpha, OC \perp \beta$.

$\angle COD$ или смежный с ним — линейный угол.

Трехгранные углы

Трехгранный угол $SABC$ — фигура, состоящая из трех плоских углов ASB, BSC, ASC.



S — **вершина трехгранного угла,** SA, SB, SC — **плоские углы трехгранного угла (грани трехгранного угла).**

Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называют **двугранными углами трехгранного угла.**

Свойства

1. Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла.

$$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC.$$

2. Сумма трех плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

$$\angle ASB + \angle ASC + \angle BSC < 360°.$$

3. Теорема синусов трехгранного угла:

$$\frac{\sin A^*}{\sin A} = \frac{\sin B^*}{\sin B} = \frac{\sin C^*}{\sin C};$$

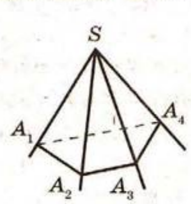
Теорема косинусов трехгранного угла:

$\cos C = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C^*$;

где A^*, B^*, C^* — меры двугранных углов с ребрами SA, SB, SC соответственно; A, B, C — меры плоских углов, противолежащих соответственно BC, AC, AB.

Многогранный угол

Многогранный угол $SA_1A_2...A_n$ — фигура, ограниченная несколькими n плоскими углами, у которых общая вершина, а стороны попарно общие (причем, каждые три последующие общие стороны не лежат в одной плоскости).



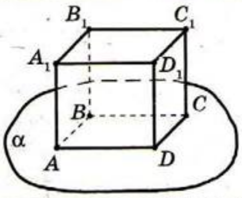
S — вершина;

$SA_1, SA_2, ..., SA_n$ — ребра;

$\angle A_1SA_2, \angle A_2SA_3, ..., \angle A_nSA_1$ — грани.

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

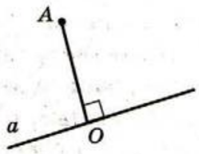
ТАБЛИЦА 59. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ



Суммы расстояний от противолежащих вершин параллелограмма к плоскости, не пересекающей его, равны.

Метрическая геометрия — геометрия, изучающая свойства пространств с заданным способом нахождения расстояний между двумя точками (с заданной метрикой).

Расстояние от точки до прямой

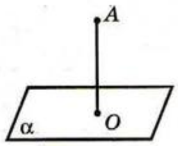


Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

AO — расстояние от точки A до прямой a.

Если точка лежит на прямой, расстояние от точки до прямой равно нулю.

Расстояние от точки до плоскости

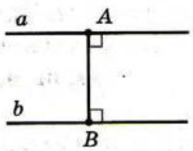


Расстояние от точки до плоскости — длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

$AO \perp \alpha, AO$ — расстояние от точки A до плоскости α.

Если точка лежит на плоскости, то расстояние от точки до плоскости равно нулю.

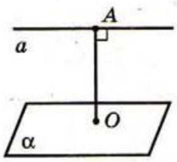
Расстояние между параллельными прямыми



Расстояние между параллельными прямыми — расстояние от любой точки одной прямой до второй прямой. Это расстояние равно длине общего перпендикуляра (отрезка, перпендикулярного этим прямым, концы которого лежат на этих прямых).

AB — расстояние между прямыми a и b.

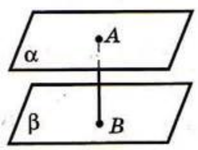
Расстояние между параллельными прямой и плоскостью



Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости — расстояние от любой точки этой прямой до плоскости. Это расстояние равно длине общего перпендикуляра (отрезка, перпендикулярного прямой и плоскости, один конец которого принадлежит прямой, а другой — плоскости).

AO — расстояние от прямой a до плоскости α.

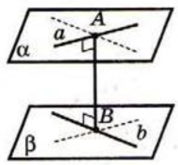
Расстояние между параллельными плоскостями



Расстояние между параллельными плоскостями — расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости. Это расстояние равно длине общего перпендикуляра к этим плоскостям (отрезка, перпендикулярного этим плоскостям и концы которого лежат в этих плоскостях).

AB — расстояние между плоскостями α и β.

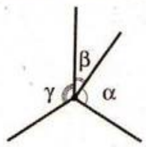
Расстояние между непересекающимися прямыми



Расстояние между непересекающимися прямыми— длина их общего перпендикуляра (отрезка, перпендикулярного прямым и концы которого лежат на этих прямых). Это расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими эти прямые, или равно расстоянию от любой точки одной прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую и параллельной первой.

AB — расстояние между прямыми a и b.

ТАБЛИЦА 60. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ
$0° \le \alpha \le 90°$



Если α, β, γ — углы, образованные произвольной прямой с тремя перпендикулярными прямыми, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

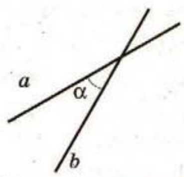
Основы теории конформных отражений заложил Л. Эйлер (1777).

Конформное отражение — это преобразование, при котором сохраняются углы. Примером конформного отражения является преобразование подобия.

Угол между прямыми

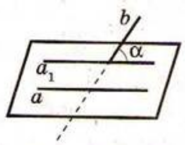
Угол между параллельными прямыми (или совпадающими прямыми) считают равным 0°.

Угол между пересекающимися прямыми — не больше из углов, образующихся при пересечении прямых.



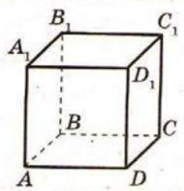
На рисунке угол между прямыми a и b равен α, где $0° < \alpha \le 90°$.

Угол между непересекающимися прямыми — угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным непересекающимся прямым.



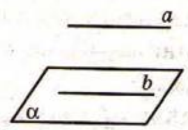
На рисунке угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a_1 и b.

Перпендикулярные прямые — прямые, угол между которыми равен 90°.



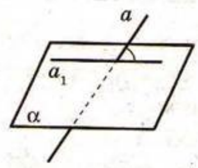
На рисунке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. $AD \perp DC, AD \perp CC_1$.

Угол между прямой и плоскостью



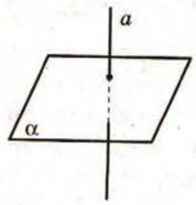
Угол между прямой и плоскостью, параллельной прямой или содержащей эту прямую, считают равным 0°.

На рисунке угол между прямой a и плоскостью α ($a \parallel \alpha$) равен 0°, угол между прямой b и плоскостью α ($b \subset \alpha$) равен 0°.



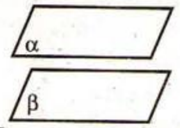
Угол между плоскостью и прямой, пересекающей плоскость, — угол между прямой и ортогональной проекцией этой прямой на плоскость.

На рисунке угол между прямой a и плоскостью α равен углу между прямыми a и a_1, где a_1 — ортогональная проекция a на α.



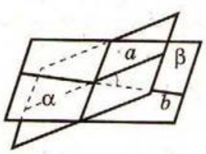
Угол между плоскостью и прямой, перпендикулярной плоскости, считают равным 90°.

Угол между плоскостями



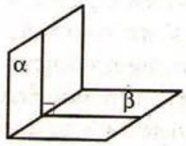
Угол между параллельными или совпадающими плоскостями, считают равным 0°.

На рисунке угол между плоскостями α и β ($\alpha \parallel \beta$) равен 0°.

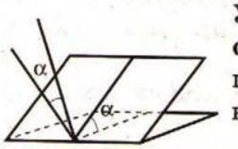


Угол между пересекающимися плоскостями, — угол между прямыми, по которым пересекаются данные плоскости плоскостью, перпендикулярной прямой их пересечения.

На рисунке угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b.



Угол между перпендикулярными плоскостями равен 90°.



Угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям.

ТАБЛИЦА 61. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

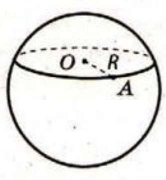
Геометрическим местом середин отрезков с концами на двух данных непересекающихся прямых является плоскость.

Геометрическим местом середин отрезков, параллельных данной плоскости, концы которых находятся на двух непересекающихся прямых, является прямая.

Определение

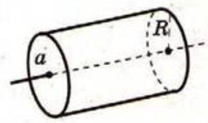
Геометрическое место точек пространства — фигура, состоящая из всех точек пространства, которые имеют определенное свойство.

Геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки



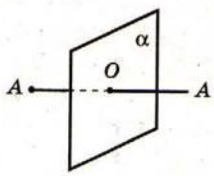
Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от данной точки O на данное расстояние R, является сфера с центром в точке O и радиусом R.

Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой



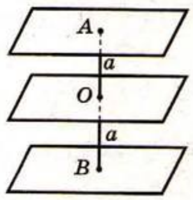
Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от данной прямой a на данное расстояние R, является цилиндрическая поверхность с осью a и радиусом R.

Геометрическое место точек, равноудаленных от концов данного отрезка



Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от концов отрезка AB, является плоскость, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная прямой AB.

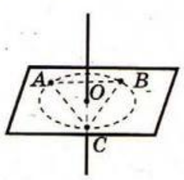
Геометрическое место точек, равноудаленных от данной плоскости



Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от данной плоскости на расстояние a, являются две параллельные ей плоскости, находящиеся от нее на расстоянии a.

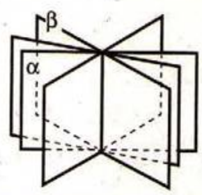
Геометрическое место точек, равноудаленных от трех точек, не лежащих на одной прямой

Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, есть перпендикуляр к плоскости этих точек, который проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC.



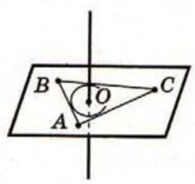
Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей

Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей α и β, есть две бисекторные плоскости (плоскости, проходящие через прямую пересечения плоскостей α и β, и делящие образованные двугранные углы пополам).

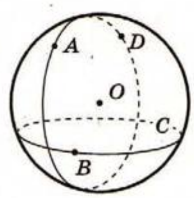


Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон треугольника

Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от сторон треугольника ABC, есть перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, который проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.



Геометрическое место точек, равноудаленных от четырех точек, не лежащих в одной плоскости



Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от четырех данных точек A, B, C, D, не лежащих в одной плоскости, есть центр сферы, которая проходит через данные точки.

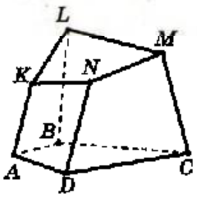
ТАБЛИЦА 62. МНОГОГРАННИК

Никакой многогранник не может иметь 7 ребер.

Футбольный мяч состоит из правильных пятиугольников и шестиугольников. Многогранники, состоящие из разных правильных многоугольников, в каждой вершине которых сходится одинаковое число ребер, называют полуправильными. Тринадцать видов полуправильных многогранников открыл и описал Архимед в III в. н.э.

Л. Эйлер (1707–1783)

Свойства правильных многогранников подробно исследовали пифагорийцы в VI в. до н.э.

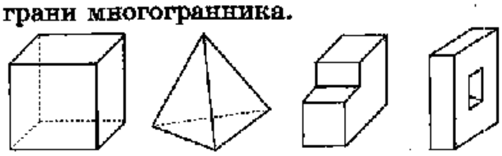


Определение

Многогранник — геометрическое тело, поверхность которого ограничена конечным числом многоугольников. Многоугольники, ограничивающие поверхность тела, называют **гранями**, стороны граней называют **ребрами**, вершины многоугольника называют **вершинами многогранника**.

ABCDKLMN — многогранник; *AKND, DCMN, BCML, ABLK, ABCD, KLMN* — грани многогранника; *AK, DN, MC, BL, KL, LM, MN, KN, AB, BC, DC, AD* — ребра многогранника; *A, B, C, D, K, L, M, N* — вершины многогранника.

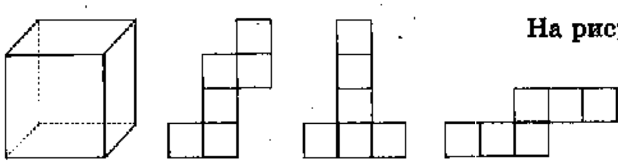
Многогранник называют **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой грани многогранника.



а) б)

На рисунке а) изображены выпуклые многогранники, а на рисунке б) — многогранники, не являющиеся выпуклыми.

Если поверхность многогранника разрезать по нескольким ребрам и разложить на плоскости, то получим **развертку** данного многогранника.



На рисунке изображен куб и три его развертки.

Площадь поверхности многогранника — это сумма площадей всех его граней. Она равна площади развертки данного многогранника.

Теорема Эйлера

Для любого выпуклого многогранника выполняется равенство В + Г − Р = 2, где В — количество вершин, Г — число граней, Р — число ребер многогранника.

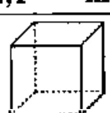
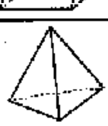
	В = 8, Г = 6, Р = 12.	В + Г − Р = 8 + 6 − 12 = 2.
	В = 4, Г = 4, Р = 6.	В + Г − Р = 4 + 4 − 6 = 2.

ТАБЛИЦА 63. ОБЪЕМ ТЕЛА

Любые два равновеликих многогранника не равносоставные (то есть не могут быть разрезаны на одинаковое число попарно равных многогранников).

Знак объема V тела является первой буквой латинского слова «volumen» — объем.

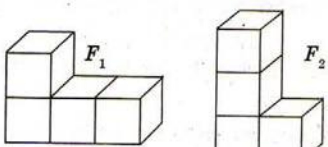
Есть универсальная формула, при помощи которой можно вычислить объем призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.

$V = \dfrac{H}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$ *(формула Симпсона), где H — высота тела, B_1 — площадь нижнего основания, B_2 — площадь среднего сечения, B_3 — площадь верхнего основания.*

Объем тела

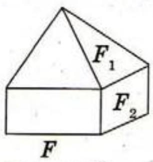
Объем — это положительная величина, числовое значение которой имеет такие свойства:

- Равные тела имеют равные объемы.



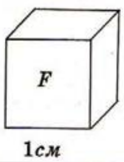
$V_{F_1} = V_{F_2}$.

- Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.



$V_F = V_{F_1} + V_{F_2}$.

- Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

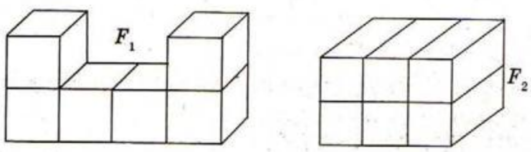


$S_F = 1$ см³.

Равновеликие тела

Равновеликие тела — два тела, имеющие равные объемы.

Тела F_1 и F_2 — равновеликие.



Равные тела — равновеликие.
Равновеликие тела не всегда равны.

Единицы объема

$$1\begin{matrix}\text{см}^3\\ \text{дм}^3\\ \text{м}^3\end{matrix} = 10^3\begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{см}^3\\ \text{дм}^3\end{matrix} = 1000\begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{см}^3\\ \text{дм}^3\end{matrix}$$

$$1\begin{matrix}\text{дм}^3\\ \text{м}^3\end{matrix} = 100^3\begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{см}^3\end{matrix} = 1\,000\,000\begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{см}^3\end{matrix}$$

$$1\begin{matrix}\text{м}^3\\ \text{см}^3\end{matrix} = 1000^3\begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{м}^3\end{matrix} = 1\,000\,000\,000\begin{matrix}\text{мм}^3\\ \text{м}^3\end{matrix}$$

Сравнительные таблицы метрических и других мер

1 куб. сажень = 9,71268 куб. метра;

1 куб. аршин = 0,359729 куб. метра;

1 куб. вершок = 87,8244 куб. сантиметра;

1 куб. фут = 0,0283168 куб. метра;

1 куб. дюйм = 16,3871 куб. сантиметра;

1 куб. метр = $\begin{cases}0,102958 \text{ куб. сажня;}\\ 2,77987 \text{ куб. аршина;}\\ 35,3147 \text{ куб. фута;}\end{cases}$

1 куб. сантиметр = $\begin{cases}0,0113864 \text{ куб. вершка;}\\ 0,0610237 \text{ куб. дюйма;}\end{cases}$

1 литр = $\begin{cases}0,081305 \text{ ведра;}\\ 0,0381116 \text{ четверика;}\end{cases}$

1 бочка = 4,9196 гектолитра;

1 ведро = 12,299 литра;

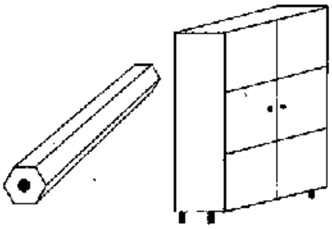
1 штоф = 1,2299 литра;

1 бутылка = 0,3074 литра;

1 сотка (рюмка) = 0,123 литра;

1 четверик = 26,2387 литра.

ТАБЛИЦА 64. ПРИЗМА

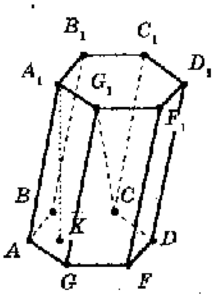


Знак высоты H происходит от латинского слова «hipsos» — высота.

Если две боковые грани треугольной призмы перпендикулярны, то сумма квадратов площадей этих граней равна квадрату площади третьей боковой грани.

Слово «призма» греческого происхождения и буквально означает «отпиленный кусок».

Определение



n-угольная призма — многогранник, две грани которого — n-угольники, лежащие в разных плоскостях и совмещенные параллельным переносом, а другие n граней — параллелограммы.

n-угольники называют **основаниями призмы**, а параллелограммы — **боковыми гранями призмы.**

$ABCDFG$, $A_1B_1C_1D_1F_1G_1$ — основания; AA_1G_1G, AA_1B_1B, BB_1C_1C, $CC_1D_1D, DD_1F_1F, FF_1G_1G$ — боковые грани.

Стороны основ называют **ребрами оснований,** другие ребра называют **боковыми ребрами.** $AB, BC...$ — ребра оснований; $AA_1, BB_1...$ — боковые ребра.

Высота призмы — расстояние между плоскостями ее оснований $A_1K \perp (ABC), A_1K$ — высота.

Диагональ призмы — отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани. GG_1 — диагональ.

Свойства

1. n-угольная призма имеет: $n+2$ грани, $3n$ ребер, $2n$ вершин.

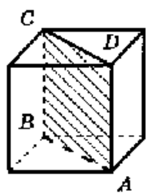
2. У n-угольной призмы $n(n-3)$ диагоналей ($n>3$).

3. Основания призмы параллельны и равны. $ABCDFG = A_1B_1C_1D_1F_1G_1, (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

4. Боковые ребра параллельны и равны. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel FF_1 \parallel GG_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = FF_1 = GG_1$.

5. Боковые грани — параллелограммы AA_1B_1B, $BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1F_1F, FF_1G_1G, GG_1A_1A$.

6. Диагональное сечение (сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани) призмы — параллелограмм.



$ABCD$ — диагональное сечение, $ABCD$ — параллелограмм.

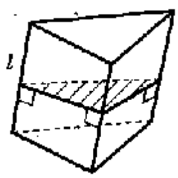
Площадь поверхности призмы

Боковая поверхность призмы — сумма площадей боковых граней.

Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

$$S = S_{бок.} + 2S_{осн.}$$

Площадь боковой поверхности равна произведению периметра перпендикулярного сечения



(сечение плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам и пересекающей все боковые ребра) на длину бокового ребра.

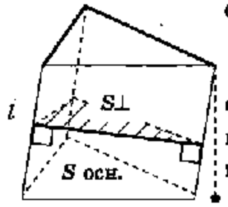
$$S_{бок.} = P_{\perp} \cdot l.$$

Объем призмы

Объем призмы равен:

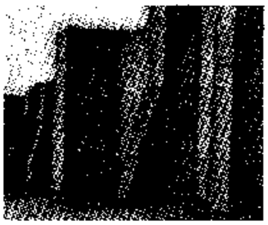
- произведению площади ее основания на высоту.

$$V = S_{осн.} \cdot H.$$



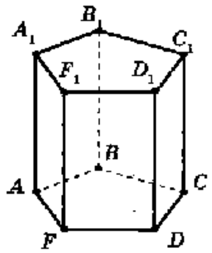
- произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро.

$$V = S_{\perp} \cdot l.$$



Объем прямой призмы, в основании которой лежит трапеция, равен произведению полусуммы площадей параллельных боковых граней на расстояние между ними.

Еще в Древнем Египте, Вавилоне, Индии, Китае пользовались практическими правилами нахождения объемов тел призматической формы.



Определение

Прямая призма — призма, все боковые ребра которой перпендикулярны основаниям.

$AA_1 \perp (ABC), BB_1 \perp (ABC), CC_1 \perp (ABC), DD_1 \perp (ABC), FF_1 \perp (ABC)$.

$ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ — прямая призма.

Свойства

1. Имеет все свойства призмы.

2. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники.
AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, ... — прямоугольники.

3. Боковое ребро равно высоте прямой призмы.

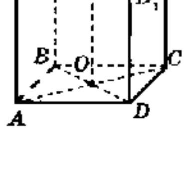
$$H = AA_1 = BB_1 = CC_1 = ...$$

4. Все двугранные углы при ребрах основания прямой призмы прямые.

5. Линейные углы двугранных углов при боковых ребрах прямой призмы равны соответствующим углам основания.

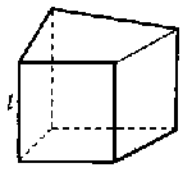
6. Диагональное сечение прямой призмы — прямоугольник.

7. Если диагональные сечения пересекаются, то их общий отрезок параллелен боковому ребру, равен ему и перпендикулярен основаниям.



$$OO_1 \parallel AA_1, OO_1 = AA_1,$$
$$OO_1 \perp (ABC).$$

Площадь поверхности прямой призмы



Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на длину бокового ребра.

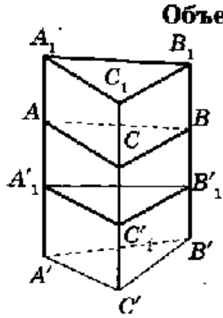
$$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot l.$$

Объем прямой призмы

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на длину бокового ребра.

$$V = S_{осн.} \cdot l.$$

Объем косой призмы



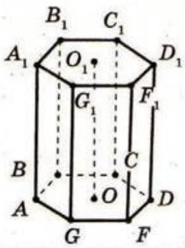
Косая призма равновелика такой прямой призме, основание которой равно перпендикулярному сечению косой призмы, а высота — ее боковому ребру.

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{A'B'C'A'_1B'_1C'_1}.$$

Объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между плоскостью этой грани и противолежащим боковым ребром.

Диагональное сечение правильной пятиугольной призмы является параллельным одной из боковых граней.

Большая диагональ правильной шестиугольной призмы меньше удвоенной диагонали боковой грани.



Определение

Правильная призма — прямая призма, основание которой — правильный многоугольник.

Ось правильной призмы — прямая, проходящая через центры оснований.

OO_1 — ось призмы.

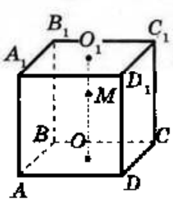
Свойства

1. Правильная призма имеет все свойства призмы и прямой призмы.

2. Боковые грани правильной призмы равны.
$AA_1B_1B = BB_1C_1C = CC_1D_1D = DD_1F_1F = \dots$.

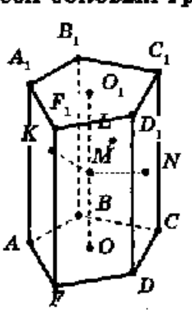
3. Двугранные углы при боковых ребрах равны. Линейные углы этих двугранных углов равны $\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

4. Любая точка оси призмы равноудалена ото всех вершин одной из оснований призмы.



$MA = MB = MC = MD$,
$MA_1 = MB_1 = MC_1 = MD_1$.

5. Любая точка оси призмы равноудалена ото всех боковых граней правильной призмы.



$MK \perp (ABB_1), ML \perp (BCC_1)$,
$MN \perp (CDD_1)$.
$MK = ML = MN$.

Площадь боковой поверхности

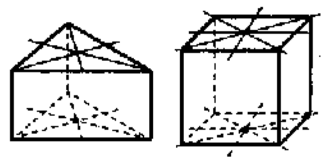
Площадь боковой поверхности правильной призмы равна произведению площади одной боковой грани на количество граней.

$$S_{\text{бок.}} = S_{\text{гр.}} \cdot n = aln,$$

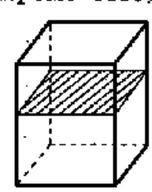
где a — ребро основания, l — боковое ребро.

Симметрия правильных призм

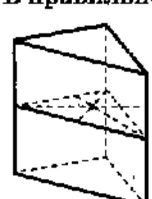
- В правильной n-угольной призме n плоскостей симметрии, проходящих через соответствующие оси симметрии оснований призмы.



- Кроме того, в n-угольной призме есть еще одна плоскость симметрии, проходящая через середины боковых ребер.



- В правильной n-угольной призме n осей симметрии сечения этой призмы, который проходит через середины боковых ребер.



- Кроме того, если n — четное, то осью симметрии является прямая, соединяющая центры оснований.

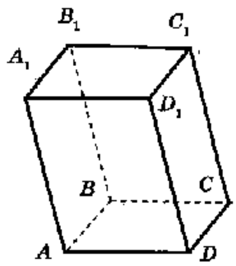
- Если n — четное, то середина оси призмы является центром симметрии призмы.

ТАБЛИЦА 67. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Сумма квадратов площадей диагональных сечений параллелепипеда равна сумме квадратов площадей его боковых граней.

Слово «параллелепипед» происходит от греческих слов: «parallelos» — параллельный и «epipedes» — ровное, плоское.

Сечение параллелепипеда плоскостью не может быть правильным пятиугольником.



Определение

Параллелепипед — призма, основание которой параллелограмм. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

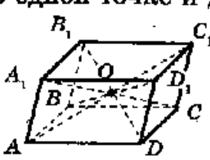
Противолежащие грани параллелепипеда — грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин.

Свойства

1. Все грани параллелепипеда — параллелограммы. $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1, BB_1C_1C, CC_1D_1D, AA_1D_1D — параллелограммы.

2. Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.
$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1), (AA_1D) \parallel (BCC_1), (ABB_1) \parallel (DCC_1)$.
$ABCD = A_1B_1C_1D_1, ABB_1A_1 = DCC_1D_1$,
$ADD_1A_1 = BCC_1B_1$.

3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

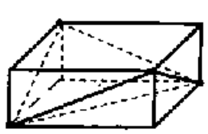


$AO = OC_1, B_1O = OD$,
$BO = OD_1, CO = OA_1$.

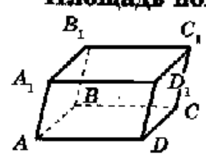
4. Сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.
$AC_1^2 + BD_1^2 + CA_1^2 + DB_1^2 = 4AD^2 + 4AB^2 + 4AA_1^2$.

5. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

6. В параллелепипед можно вписать тетраэдр, объем которого равен $\dfrac{1}{3}$ объема параллелепипеда.



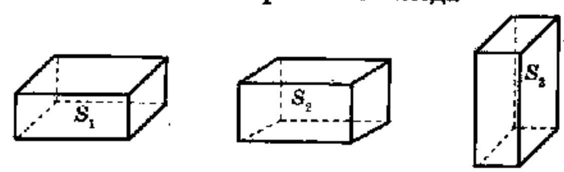
Площадь поверхности параллелепипеда



Площадь поверхности параллелепипеда равна удвоенной сумме площадей трех граней параллелепипеда, имеющих общую вершину.

$$S = 2(S_{ABCD} + S_{AA_1D_1D} + S_{ABB_1A_1}).$$

Объем параллелепипеда



Любую пару противолежащих граней можно считать основаниями, в зависимости от этого можно рассматривать три высоты (H_1, H_2, H_3).

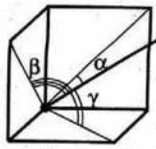
$$V = H_1S_1 = H_2S_2 = H_3S_3.$$

Дополнительные свойства

- Если сечение призмы плоскостью, пересекающей все боковые ребра, — параллелограмм, то эта призма — параллелепипед.

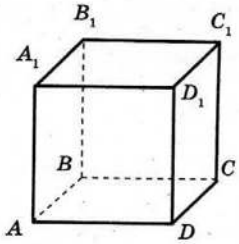
- Сумма квадратов площадей диагональных сечений параллелепипеда равна сумме квадратов площадей его боковых граней.

ТАБЛИЦА 68. ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



Если три плоскости попарно перпендикулярны и некоторая прямая образует с ними углы α, β, γ, *то*
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$

Любая плоскость, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на две части равного объема.



Определение

Прямой параллелепипед — параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны основаниям.

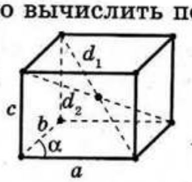
Свойства

1. Имеет все свойства параллелепипеда.

2. Все боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.

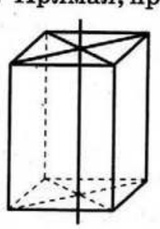
3. Боковые грани перпендикулярны основаниям.

4. Диагонали прямого параллелепипеда можно вычислить по формулам:

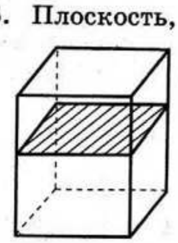


$$d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha,$$
$$d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha.$$

5. Прямая, проходящая через центры симметрий оснований прямого параллелепипеда, является осью симметрии прямого параллелепипеда.

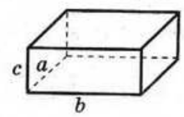


6. Плоскость, проходящая через середины боковых ребер прямого параллелепипеда, является плоскостью симметрии прямого параллелепипеда.



Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда

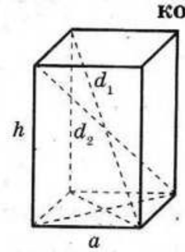
Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда можно вычислить по формуле:



$$S = 2(a + b)c,$$

где a, b — стороны основания,
c — боковое ребро.

Прямой параллелепипед, в основании которого лежит ромб



- $4a^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2h^2$, где
a — ребро основания,
h — высота параллелепипеда,
d_1, d_2 — диагонали параллелепипеда.

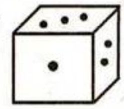
- Если площади диагональных сечений равны S_1 и S_2, то боковая поверхность параллелепипеда равна $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

- Прямой параллелепипед, в основании которого лежит ромб, имеет три оси симметрии и три плоскости симметрии.

ML, NK, OO_1 — оси симметрии
(MNL), (BDD_1), (ACC_1) — плоскости симметрии.

ТАБЛИЦА 69. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД. КУБ

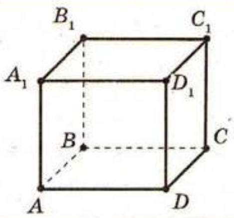
Если диагонали параллелепипеда равны, то этот параллелепипед — прямоугольник.



«Куб» в переводе с греческого означает «игральная кость».

Египетские пирамиды состоят из огромных каменных глыб, каждая такая глыба имела форму прямоугольного параллелепипеда.

Термин «куб» встречается у Эвклида.



Определение

Прямоугольный параллелепипед — прямой параллелепипед, основания которого прямоугольники.

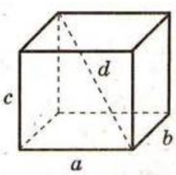
Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, называют его **измерениями**.

AB, AD, AA_1 — измерения прямоугольного параллелепипеда.

Свойства

1. Имеет все свойства параллелепипеда и прямого параллелепипеда.

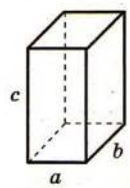
2. Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.



3. У прямоугольного параллелепипеда квадрат диагонали равен сумме квадратов его измерений.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда



Площадь поверхности можно вычислить по формуле

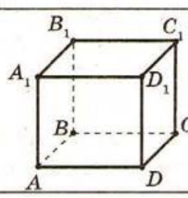
$$S = 2(ab + bc + ac),$$

где a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда.

Объем прямоугольного параллелепипеда

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$V = abc.$$



Определение

Куб — прямоугольный параллелепипед, все измерения которого равны.

Свойства

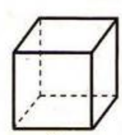
1. Имеет все свойства прямого параллелепипеда.

2. У куба все грани — квадраты.

3. Диагональ в $\sqrt{3}$ раз больше ребра куба.

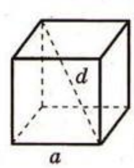
$$d = \sqrt{3}a.$$

Площадь поверхности куба



Площадь боковой поверхности $S_{бок.} = 4a^2$, площадь поверхности куба $S = 6a^2$, где a — ребро куба.

Объем куба

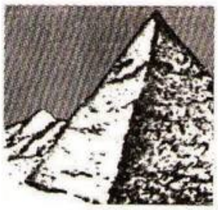


Объем куба:

$V = a^3$, где a — ребро куба;

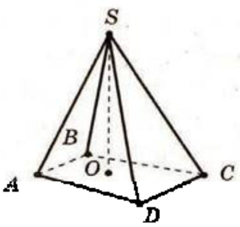
$V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$, где d — диагональ куба.

ТАБЛИЦА 70. ПИРАМИДА



«Пирамида» — египетское слово, которым называли усыпальницы фараонов.

Правило нахождения объема пирамиды вывел Эвдокс Книдский в IV в. до н.э.



Определение

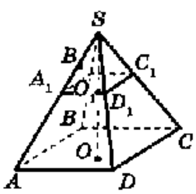
n-угольная пирамида — многогранник, у которого одна грань — произвольный n-угольник, а остальные n граней — треугольники, имеющие общую вершину. n-угольник называют **основанием**, треугольники — **боковыми гранями**, а общую вершину боковых граней — **вершиной пирамиды.**

$SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — основание; SAB, SBC, SCD, SAD — боковые грани; S — вершина пирамиды.

Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основы. SO — высота.

Свойства

1. У n-угольной пирамиды $n + 1$ граней, из них n боковых, всего $2n$ ребер, $n + 1$ вершин.



2. Сечением, параллельным основанию пирамиды, является многоугольник, подобный основанию.

$$A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD.$$

Плоскость этого сечения разбивает боковые ребра и высоту пирамиды на пропорциональные отрезки.

$$\frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1} = \frac{SD}{SD_1} = \frac{SO}{SO_1}.$$

Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний к вершине пирамиды.

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2.$$

Сечение отсекает от пирамиды пирамиду, подобную данной. Объемы этих пирамид относятся как кубы расстояний от вершины пирамид до их основ.

$$SABCD \sim SA_1B_1C_1D_1,$$

$$\frac{V_{SABCD}}{V_{SA_1B_1C_1D_1}} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^3.$$

Площадь поверхности пирамиды

Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площади боковой поверхности и площади основания.

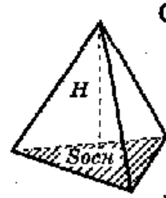
$$S = S_{бок.} + S_{осн.}.$$

Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей боковых граней.

$$S_{бок.} = S_1 + S_2 + ... + S_n,$$

где $S_1, S_2, ..., S_n$ — площади боковых граней пирамиды.

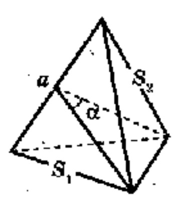
Объем пирамиды



Объем пирамиды равен трети произведения площади основания пирамиды и ее высоты.

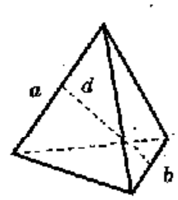
$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H.$$

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды)



$$V = \frac{2S_1S_2 \sin\alpha}{3a},$$

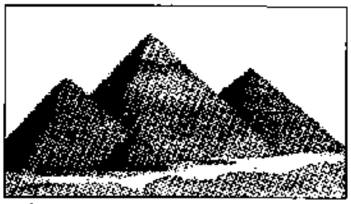
где S_1, S_2 — площади двух граней, a — длина общего ребра, α — двугранный угол при ребре a.



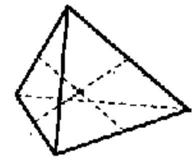
$$V = \frac{1}{6} abd \sin\varphi,$$

где a, b — два противолежащих ребра тетраэдра, d — расстояние между ними, φ — угол между ними.

ТАБЛИЦА 71. ПОЛОЖЕНИЕ ВЫСОТЫ В НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ПИРАМИД

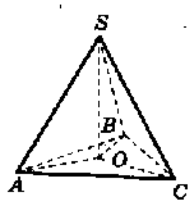


Непересекающиеся ребра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.



Отрезки, соединяющие середины непересекающихся ребер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке.

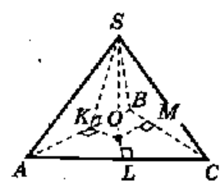
Пирамида, все боковые ребра которой равны между собой



Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или все боковые ребра наклонены под одним углом к основанию, или все боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды), то основанием высоты пирамиды есть центр окружности, описанной около основания.

Если $SA = SB = SC$ (или $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$, или $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$), то O — центр окружности, описанной около ABC.

Пирамида, все двугранные углы при ребрах основания которой равны между собой



Если двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны (или высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны, или высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, образуют с высотой пирамиды равные углы), то основанием высоты пирамиды есть центр окружности, вписанной в основание.

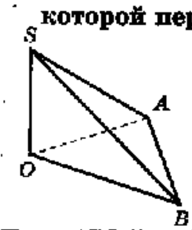
Если $\angle SKO = \angle SMO = \angle SLO$ (или $SK = SM = SL$, или $\angle KSO = \angle MSO = \angle LSO$), то O — центр окружности, вписанной в ABC.

Пирамида, одна из боковых граней которой перпендикулярна основанию

Если одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию, то высотой пирамиды является высота этой грани, проведенная из вершины пирамиды.

Если $(SAB) \perp (ABC)$, $SO \perp AB$, то $SO \perp (ABC)$.

Пирамида, две соседние боковые грани которой перпендикулярны основанию



Если две соседние боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, то высотой пирамиды является общее ребро этих граней.

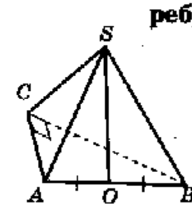
Если $(SOA) \perp (ABC)$, $(SOB) \perp (ABC)$, то $SO \perp (ABC)$.

Пирамида, два двугранных угла при соседних ребрах основания которой равны

Если в пирамиде два двугранных угла при соседних ребрах основания равны, то основа высоты пирамиды принадлежит биссектрисе между данными ребрами.

Если $SO \perp (ABC)$, $\angle SMO = \angle SNO$, то $\angle MCO = \angle NCO$.

Пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник и все боковые ребра которой равны



Если в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник и боковые ребра ее равны, то основание высоты пирамиды — середина гипотенузы.

Если $\angle ABC = 90°$, $SA = SB = SC$, $SO \perp (ABC)$, то $AO = BO$.

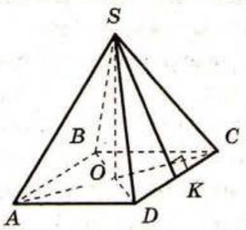
ТАБЛИЦА 72. ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Демокрит (460–370 до н.э.)

Самая большая египетская пирамида — это пирамида Хеопса, она имеет высоту 146 м, а периметр основания — около 1 км.

Как свидетельствует Архимед, еще в V в. до н.э. Демокрит из Абдеры установил, что объем пирамиды равен трети объема призмы с тем же основанием и той же высотой.

Архимед (III в. до н.э.)



Правильная пирамида — пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а основание высоты пирамиды совпадает с центром этого многоугольника.

$SABCD$ — правильная пирамида, $ABCD$ — квадрат, O — центр квадрата, $SO \perp (ABC)$.

Апофема правильной пирамиды — высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды. $SK \perp DC$, SK — апофема.

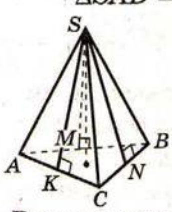
Свойства

1. Правильная пирамида имеет все свойства пирамиды.

2. Все боковые ребра правильной пирамиды равны. $SA = SB = SC = SD$.

3. Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

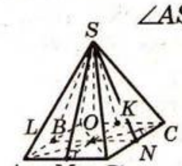
$$\Delta SAD = \Delta SDC = \Delta SBC = \Delta SAB.$$



4. Апофемы правильной пирамиды равны.
$SM \perp AB, SN \perp AC, SK \perp BC$,
$SM = SN = SK$.

5. Все плоские углы при вершине равны.

$$\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA.$$



6. Все двугранные углы при ребрах основания равны (боковые грани одинаково наклонены к основанию).

$$\angle SLO = \angle SMO = \angle SNO = \angle SKO.$$

7. Все двугранные углы при боковых ребрах равны.

$AM \perp SC, BM \perp SC$,
$CN \perp SB, AN \perp SB$,
$\angle AMB = \angle CNA$.

8. Каждая точка высоты правильной пирамиды равноудалена от:

- всех вершин основания;
- всех боковых граней;
- всех боковых ребер.

9. Диагональное сечение правильной пирамиды (сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани) — равнобедренный треугольник.

SAC — равнобедренный треугольник.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна:

- произведению полупериметра основания на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2};$$

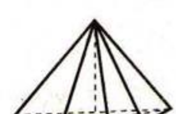
- частному от деления площади основания на косинус угла наклона боковой грани к основе:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi};$$

- произведению площади одной боковой грани на их количество:

$$S_{\text{бок.}} = S_{\text{гр.}} \cdot n.$$

Симметрия правильной пирамиды



- В правильной n-угольной пирамиде n плоскостей симметрии, проходящих через вершину пирамиды и оси симметрии ее основания.
- Кроме того, правильная n-угольная пирамида совмещается сама с собой при повороте вокруг прямой, содежащей ее высоту, на угол $\varphi = \frac{360°}{n}$ (а также на любой угол, кратный φ).

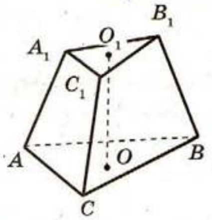
ТАБЛИЦА 73. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Если Q_1 и Q_2 — площади оснований усеченной пирамиды, S — площадь ее среднего сечения, тогда

$$\sqrt{S} = \frac{\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}}{2}$$

Вычислять объем усеченной пирамиды с квадратным основанием умели еще древние египтяне.

Определение



Усеченная пирамида — часть пирамиды, находящаяся между ее основанием и сечением пирамиды, параллельным основанию.

Параллельные грани усеченной пирамиды называют **основаниями,** а все остальные — **боковыми гранями.**

ABC, $A_1B_1C_1$ — основания пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, AA_1C_1C, CC_1B_1B, AA_1B_1B — боковые грани.

Высота усеченной пирамиды — перпендикуляр, проведенный из любой точки одного основания на плоскость другого основания.

$OO_1 \perp (ABC)$, OO_1 — высота.

Свойства

1. n-угольная усеченная пирамида имеет $n + 2$ граней, $2n$ вершин, $3n$ ребер.

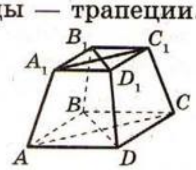
2. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

3. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

$$AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1A_1A \text{ — трапеции.}$$

4. Диагональные сечения усеченной пирамиды — трапеции.



AA_1C_1C, BB_1D_1D — трапеции.

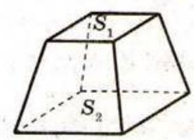
5. Если S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды, а S — площадь их среднего сечения, то

$$\sqrt{S} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}.$$

6. Если a^2 и b^2 — площади оснований усеченной пирамиды, то площадь сечения, параллельного основаниям усеченной пирамиды, который делит объем пополам, равна:

$$S = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2}.$$

Площадь поверхности усеченной пирамиды



Площадь поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей оснований и площади боковой поверхности

$$S = S_1 + S_2 + S_{бок.}.$$

Объем усеченной пирамиды

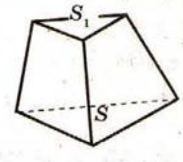
Объем усеченной пирамиды можно вычислить по формуле:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

где S_1, S_2 — площади оснований,
H — высота усеченной пирамиды.

Соотношения между объемом полной и объемом усеченной пирамиды

Если S_1 и S ($S_1 < S$) — площади оснований усеченной пирамиды, а ее объем равен V_1, то объем полной пирамиды равен:

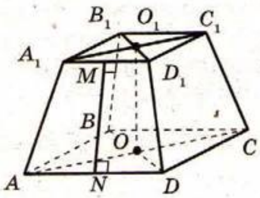


$$V = \frac{V_1\sqrt{S^3}}{\sqrt{S^3} - \sqrt{S_1^3}}.$$

ТАБЛИЦА 74. ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Диагонали правильной четырехугольной усеченной пирамиды пересекаются в одной точке.

Древние математики рассматривали пирамиду как отдельный случай усеченной пирамиды.



Определение

Правильная усеченная пирамида — усеченная пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная четырехугольная пирамида.

Апофема правильной усеченной пирамиды — высота боковой грани, проведенной к ребру основания.

$MN \perp AD, MN$ — апофема.

Свойства

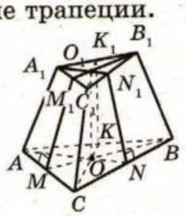
1. Имеет все свойства усеченной пирамиды.

2. У правильной усеченной пирамиды боковые ребра равны.

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1.$$

3. У правильной усеченной пирамиды боковые грани — равные равнобокие трапеции.

$AA_1B_1B,\ BB_1C_1C,\ CC_1D_1D,\ DD_1A_1A$ — равнобокие трапеции.



4. Апофемы правильной усеченной пирамиды равны.

$$MM_1 = NN_1 = KK_1.$$

5. Двугранные углы при каждом основании равны.

$$\angle M_1MO = \angle N_1NO = \angle K_1KO;$$
$$\angle MM_1O_1 = \angle NN_1O_1 = \angle KK_1O_1.$$

6. Двугранные углы при боковых ребрах равны.

7. Каждая точка прямой, проходящей через центры оснований правильной усеченной пирамиды, равноудалена от:

- всех вершин каждом основании;
- плоскостей боковых граней;
- прямых, на которых лежат боковые ребра.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

- Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

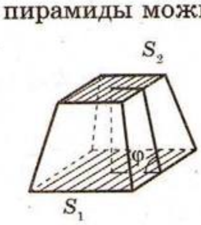
$$S_{бок.} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h,$$

где P_1 и P_2 — периметры оснований, h — апофема.

- $$S_{бок.} = \frac{hn}{2}(a + b),$$

где a, b — стороны оснований, n — количество сторон одного основания.

- Боковую поверхность правильной усеченной пирамиды можно вычислить по формуле:

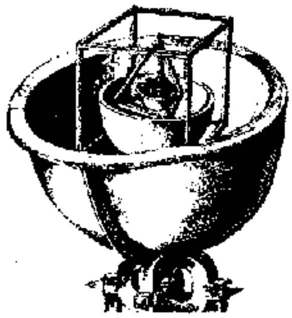


$$S_{бок.} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi},$$

где S_1 и S_2 — площади оснований,

φ — угол наклона боковой грани к большему основанию.

ТАБЛИЦА 75. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ



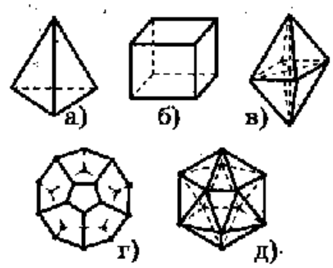
Тетраэдр означает «четырехгранник» (от греческих «tetrares» — четыре и «edra» — сторона, грань).

Октаэдр означает «восьмигранник» (от греческих «octo» — восемь, «edra» — сторона).

Икосаэдр означает «двадцатигранник» (от греческих «eikosi» — двадцать, «edra» — сторона).

Гексаэдр означает «шестигранник» (от греческих «geks» — шесть, «edra» — сторона).

Додекаэдр означает «двенадцатигранник» (от греческих «dodeka» — двенадцать, «edra» — сторона).

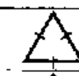
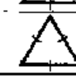
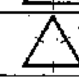
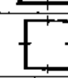


Определение

Правильный выпуклый многогранник — выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон, и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных многогранников: **правильный тетраэдр** (а), **правильный гексаэдр** (куб) (б), **правильный октаэдр** (в), **правильный** додекаэдр (г), **правильный икосаэдр** (д).

Свойства

Тип многогранника	Число			Вид грани
	ребер	граней	вершин	
Правильный тетраэдр	6	4	4	
Правильный октаэдр	12	8	6	
Правильный икосаэдр	30	20	12	
Правильный гексаэдр	12	6	8	
Правильный додекаэдр	30	12	20	

Площади поверхностей, объемы, радиусы вписанных и описанных сфер

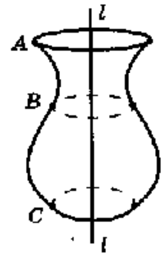
Тип многогранника	Площадь поверхности	Объем	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы
Правильный тетраэдр	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{3}{4}H=\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{4}H=\frac{a\sqrt{6}}{12}$
Правильный октаэдр	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
Правильный икосаэдр	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$	$\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$
Правильный гексаэдр	$4a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Правильный додекаэдр	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$

ТАБЛИЦА 76. ПОВЕРХНОСТЬ (ТЕЛО) ВРАЩЕНИЯ

Понятие тела вращения встречается еще в догреческую эпоху.

Архимед в своем труде «О коноидах и сфероидах» вычислил объем сегментов параболоида, гиперболоида и эминолоида вращения.

В эпоху Возрождения архитекторы и ученые развили учение о телах вращения.



Определение

Поверхность вращения — тело, образующееся путем вращения какой-нибудь кривой ABC (которую называют **образующей**) около неподвижной прямой l (которую называют **осью**); при этом считается, что образующая при своем вращении неизменно связана с осью.

Тело вращения — тело, ограниченное поверхностью вращения.

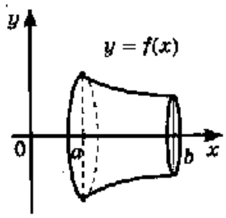
Свойства

1. Каждая точка образующей поверхности вращения описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна оси, а центр окружности лежит на пересечении этой плоскости с осью.

2. Плоскость, проходящая через ось, является ее площадью симметрии; образовавшееся сечение называют **осевым сечением**.

3. Все осевые сечения поверхности вращения равны.

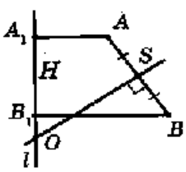
Объем тела вращения



Если криволинейная трапеция (ограниченная неотрицательной и непрерывной функцией $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$) вращается около оси OX, то объем тела вращения можно найти по формуле:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

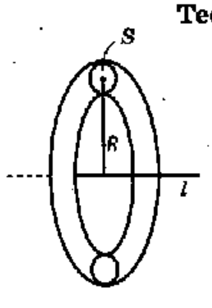
Площадь поверхности вращения (отдельный случай)



Площадь поверхности, образованной вращением отрезка AB, не имеющего с осью l общих внутренних точек, равна произведению проекции этого отрезка на ось и длины окружности, радиус которого равен отрезку серединного перпендикуляра отрезка с концами на оси и данном отрезке.

$$S = A_1B_1 \cdot 2\pi SO = 2\pi RH$$

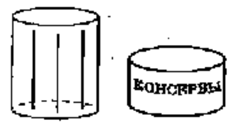
Теорема Гульдина



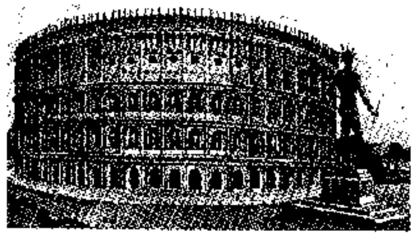
Объем тела, образованного вращением плоской фигуры около оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной ее центром масс.

$$V = 2\pi RS.$$

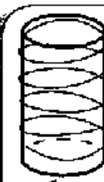
ТАБЛИЦА 77. ЦИЛИНДР



Способ вычисления боковой поверхности цилиндра нашел еще Архимед.

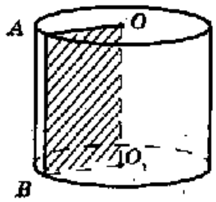


Слово «цилиндр» происходит от греческого «kilindros», что означает «вал», «каток».



Спиралевидная кривая линия, расположенная на поверхности цилиндра, которая пересекает все образующие под одинаковым углом, называется винтовой линией. Винтовая линия распространена в технике.

Определение



Цилиндр — тело, образованное вращением прямоугольника около его стороны.

На рисунке изображен цилиндр, образованный вращением прямоугольника $OABO_1$ около OO_1. OO_1 — **ось цилиндра.** Стороны AO и O_1B описывают равные углы, лежащие в параллельных плоскостях, их называют **основаниями цилиндра**. Радиусы кругов называют **радиусами цилиндра.** Сторона AB описывает поверхность, которую называют **боковой поверхностью цилиндра.** Отрезки боковой поверхности, которые равны и параллельны AB, называют **образующими цилиндра.** **Высота цилиндра** — отрезок, перпендикулярный основаниям, концы которого принадлежат основаниям.

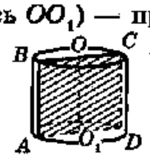
Свойства

1. Основание цилиндра равны и параллельны.

2. Образующие цилиндра равны и параллельны.

3. Высота цилиндра равна образующей.
$$AB = OO_1.$$

4. Осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1) — прямоугольник.

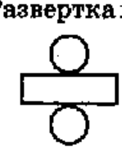


$ABCD$ — прямоугольник.

5. Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, — круг, равный основанию.

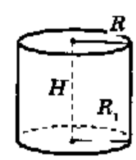
6. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, — прямоугольник (или отрезок).

7. Развертка цилиндра — прямоугольник и два круга.



Площадь поверхности цилиндра

Площадь поверхности цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей оснований.



$S = S_{бок.} + 2S_{осн.}$,

$S = 2\pi(R + H)R$,

где R — радиус основания цилиндра, H — высота.

Площадь боковой поверхности высчитывается по формуле:
$$S_{бок.} = 2\pi RH.$$

Объем цилиндра

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.
$$V = S_{осн.} \cdot H = \pi R^2 H,$$
где R — радиус основания, H — высота.

Касательная плоскость к цилиндру

Касательная плоскость к цилиндру — плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, который содержит эту образующую.

$\alpha \perp (ABC)$, α — касательная плоскость.

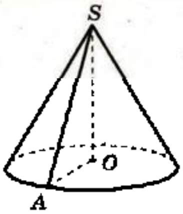
ТАБЛИЦА 78. КОНУС

Слово «конус» греческого происхождения и означает — «сосновая шишка».

Теорему о том, что объем конуса равен трети объема цилиндра с такой же площадью основания такой же высотой доказал древнегреческий ученый Эвдокс Книдский.

Боковую поверхность конуса нашел Архимед.

Конические сечения — линии (эллипс, парабола и конус), образующиеся при пересечении кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину.



Определение

Конус — тело, образованное вращением прямоугольного треугольника около одного из его катетов.

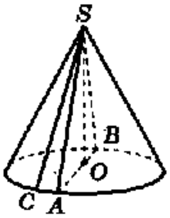
На рисунке изображен конус, образованный вращением прямоугольного треугольника SAO около катета SO. SO — **ось конуса.**

Гипотенуза SA описывает боковую поверхность конуса, а катет AO — круг — **основание конуса.** Радиус этого круга называют **радиусом конуса;** точку S, отрезок SA, отрезок SO, прямую SO называют соответственно **вершиной, образующей, высотой и осью конуса.**

Свойства

1. Образующие конуса равны.

$SA = SB = SC.$

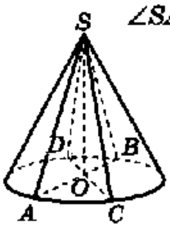


2. Осевое сечение (сечение, проходящее через ось SO) — равнобедренный треугольник.

ΔSAB — равнобедренный.

3. Углы наклона образующей к плоскости основы равны.

$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO.$

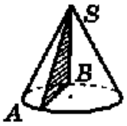


4. Углы при вершине осевых сечений равны.

$\angle ASB = \angle CSD.$

5. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, — есть круг.

6. Сечение конуса плоскостью, проходящей через две образующие конуса, есть равнобедренный треугольник.

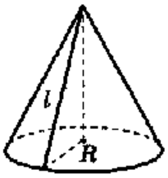


ΔSAB — равнобедренный.

7. Развертка конуса — сектор круга и круг.

Площадь поверхности конуса

Площадь боковой поверхности:



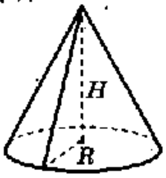
$S_{бок.} = \pi Rl$, где R — радиус основания конуса, l — образующая конуса.

Площадь полной поверхности конуса (площадь развертки):

$S = S_{бок.} + S_{осн.} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$

Объем конуса

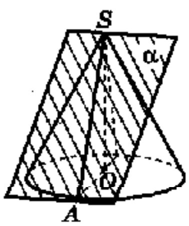
Объем конуса равен трети произведения площади основания на высоту конуса.



$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Касательная плоскость к конусу

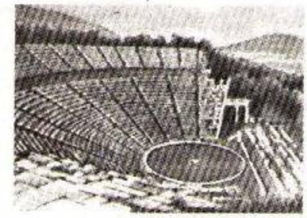
Касательная плоскость к конусу — плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, который содержит эту образующую.



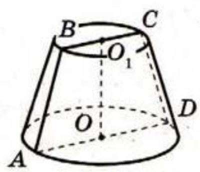
$\alpha \perp (ASO)$, α — касательная плоскость.

ТАБЛИЦА 79. УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Архимед вывел формулу для площади поверхности усеченного конуса.



Определение



Усеченный конус — часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельными плоскости основания. Усеченный конус — тело вращения, образованное в результате вращения равнобедреной трапеции около ее оси симметрии или вращения прямоугольной трапеции около оси, которая содержит боковую сторону трапеции, перпендикулярной основанию.

На рисунке изображен усеченный конус, образованный в результате вращения равнобедренной трапеции $ABCD$ около оси симметрии OO_1 или вращения прямоугольной трапеции ABO_1O около OO_1.

AB, CD — образующие; BO_1, CO_1 — радиусы верхнего основания; AO, OD — радиусы нижнего основания.

Высота усеченного конуса — расстояние между основаниями. OO_1 — высота.

Свойства

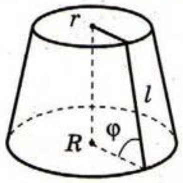
1. Осевое сечение усеченного конуса (сечение, проведенное через ось усеченного конуса) — равнобокая трапеция.

$ABCD$ — равнобокая трапеция.

2. Образующие усеченного конуса образуют равные углы с основанием.

$\angle BAO = \angle CDO$; $\angle ABO_1 = \angle DCO_1$.

3. Если радиусы оснований усеченного конуса равны r и R, а образующая равна l, то



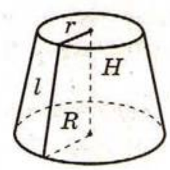
$$\cos\varphi = \frac{R-r}{l}, \cos\varphi = \frac{S-S_1}{S_{бок.}},$$

где φ — угол наклона образующей усеченного конуса к большему основанию, S и S_1 $(S > S_1)$ — площади оснований.

4. Развертка усеченного конуса — часть кругового кольца и два круга.

Площадь поверхности усеченного конуса

Площадь боковой поверхности усеченного конуса:



$$S_{бок.} = \pi l(R + r),$$

где l — образующая усеченного конуса; R, r — радиусы оснований усеченного конуса.

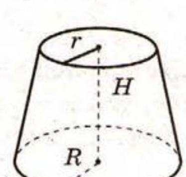
Площадь полной поверхности конуса:

$$S = S_1 + S_2 + S_{бок.} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi l(R + r) = \pi l(R + r) + \pi(R^2 + r^2),$$

где S_1, S_2 — площади оснований; R, r — радиусы оснований; l — образующая.

Объем усеченного конуса

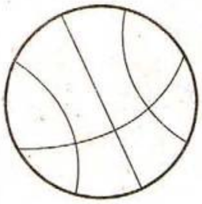
Объем усеченного конуса:



$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2),$$

где H — высота усеченного конуса; R, r — радиусы оснований.

ТАБЛИЦА 80. ШАР (СФЕРА)



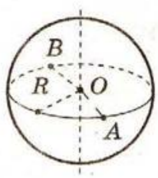
«Сфера» в переводе с греческого означает «мяч».

Форму шара имеют планеты Солнечной системы.

Сферичность Земли ввел великий древнегреческий философ Аристотель.

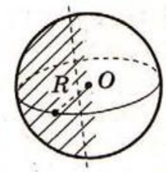
Пифагор считал шар самым совершенным из всех геометрических тел.

Определение



Сфера — поверхность вращения, образованная в результате вращения окружности около его оси симметрии.

Сфера — поверхность, состоящая из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (которое называют **радиусом**) от данной точки (которую называют **центром**).
O — центр сферы. R — радиус сферы.
Диаметр сферы — отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр.
AB — диаметр.

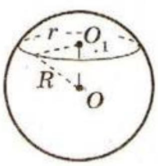


Шар — тело вращения, образованное в результате вращения полукруга около прямой, содержащей диаметр, который ограничивает полукруг.

Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, которые находятся на расстоянии не больше данного (которое называют радиусом) от данной точки (которую называют центром).
O — центр шара, R — его радиус.
Поверхностью шара является сфера.

Свойства

1. Любое сечение плоскостью сферы (шара) является окружностью (кругом).



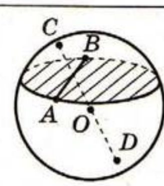
2. Прямая, проходящая через центр сферы (шара) и центр сечения, перпендикулярна к плоскости сечения.

3. Радиус R сферы (шара) и радиус r сечения связаны соотношением

$$R^2 = r^2 + OO_1^2,$$

где OO_1 — расстояние от центра сферы (шара) до центра сечения.

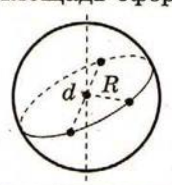
4. Радиус большей окружности (большего круга) — сечения, проходящего через центр сферы (шара), — равен радиусу сферы (шара).



5. Диаметр, проходящий через середину хорды, которая не является диаметром, перпендикулярен этой хорде.

Площадь сферы

Площадь сферы вычисляется по формулам:

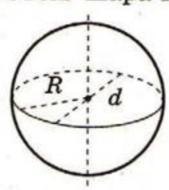


$$S = 4\pi R^2 = \pi d^2.$$

где R — радиус сферы, d — диаметр сферы.

Объем шара

Объем шара вычисляется по формулам:



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

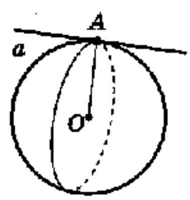
где R — радиус шара, d — диаметр шара.

ТАБЛИЦА 81. КАСАТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ К СФЕРЕ (ШАРУ). КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К СФЕРЕ (ШАРУ)

Уже в давние времена люди знали, что Земля имеет форму шара, и интересовались ее размерами. Греческий ученый Эратосфен (III в. до н.э.) первым приблизительно вычислил радиус Земли.

Сфера имеет широкое применение в науке и технике. Существует даже сферическая геометрия, которая рассматривает свойства фигур на поверхности сферы, в частности так называемых сферических треугольников.

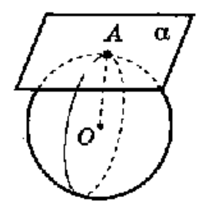
Определение



Прямая, касательная к шару (сфере), — прямая, имеющая только одну общую точку с шаром (сферой).

Прямая a касательна к шару (сфере) с центром в точке O.

A — точка касания.



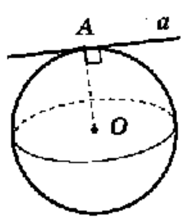
Плоскость, касательная к шару (сфере), — плоскость, имеющая с шаром (сферой) только одну общую точку.

Плоскость α касательна к шару (сфере) с центром в точке O.

A — точка касания плоскости к шару (сфере).

Свойства

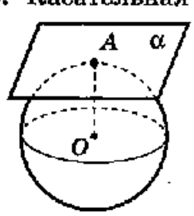
1. Касательная прямая перпендикулярна радиусу шара, проведенному в точку касания.



$$OA \perp a.$$

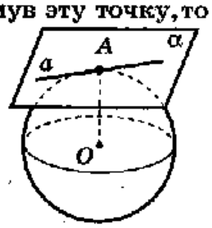
2. Если прямая проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то прямая касается сферы.

3. Касательная плоскость перпендикулярна радиусу шара, проведенному в точку касания.



$$OA \perp \alpha.$$

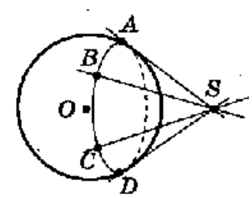
4. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то плоскость касается сферы.



5. Касательная прямая к шару лежит в касательной плоскости, проведенной через точку касания.

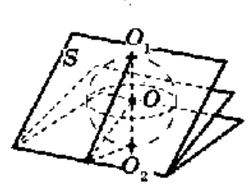
6. Все касательные прямые, проходящие через данную точку сферы, лежат в одной плоскости, касательной к этой сфере.

7. Отрезки касательных, проведенных из одной точки, лежащей вне сферы, до сферы, являются равными.



$$SA = SB = SC = SD.$$

8. Если сфера касается граней двугранного угла, то ее центр лежит на бисекториальной полуплоскости (на полуплоскости, делящей этот двугранный угол на два равных двугранных угла).



$$R = SO \cdot \sin\varphi = OO_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

где 2φ — величина двугранного угла, SO — расстояние от центра сферы до ребра, OO_1 — расстояние от центра сферы до грани.

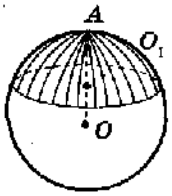
ТАБЛИЦА 82. ШАРОВОЙ СЕКТОР. ШАРОВОЙ СЕГМЕНТ. ШАРОВОЙ СЛОЙ

Формулы объема и поверхности шара вывел Архимед.

Архимед нашел формулу для определения поверхности шарового сегмента.

Эвклид в 11-й книге «Начал» дает определение шару и доказывает, что объемы шаров относятся как кубы их сечений.

Определение

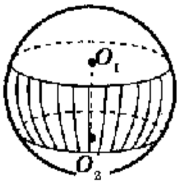


Шаровой (сферический) сегмент — часть шара (сферы), отсекаемый плоскостью.

Шаровой сегмент ограничен кругом, который называют **основанием**, и сферическим сегментом.

Высота шарового (сферического) сегмента — отрезок диаметра шара (сферы), перпендикулярного основанию шарового сегмента, один конец которого принадлежит сфере, а другой — основанию сегмента.

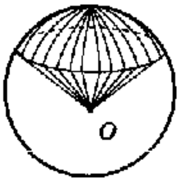
AO_1 — высота шарового сегмента.



Шаровой (сферический) слой — часть шара (сферы), расположенная между параллельными плоскостями, которые пересекают шар (сферу).

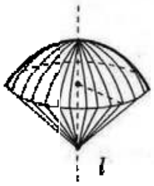
Шаровой слой ограничен двумя кругами, которые называют **основаниями**, и сферическим слоем.

Высота шарового слоя — перпендикуляр, проведенный из точки одного основания до плоскости другого основания. **Высота сферического слоя** — высота соответствующего шарового слоя.



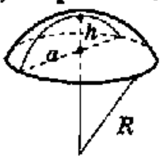
Шаровой сектор — тело, образованное вращением кругового сектора около оси, проходящей через центр.

Высота шарового сектора — высота части его сферической поверхности.



Площадь поверхности

1) шарового сегмента:

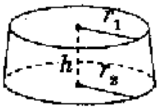


$S_{бок.} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$;
$S = \pi(2\pi Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2)$.

2) шарового сектора:

$S = \pi R(2h + a)$;
$S = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2})$.

3) шарового слоя:



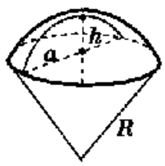
$S_{бок.} = 2\pi Rh$.

Объем

1) шарового сегмента:

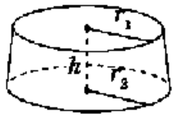
$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

2) шарового сектора:



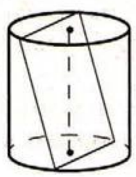
$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3}.$$

3) шарового слоя:



$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h.$$

ТАБЛИЦА 83. ВПИСАННАЯ ПРИЗМА В ЦИЛИНДР, ОПИСАННАЯ ПРИЗМА ОКОЛО ЦИЛИНДРА

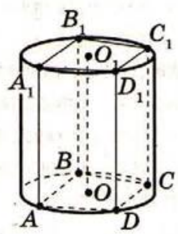


Если вершины прямоугольника лежат на боковой поверхности цилиндра, то две параллельные стороны прямоугольника перпендикулярны оси цилиндра.

Если четырехугольная прямая призма описана около цилиндра, то суммы площадей противолежащих боковых граней равны.

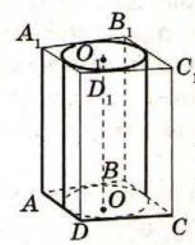
Если прямая четырехугольная призма вписана в цилиндр, то сумма противолежащих двугранных углов при боковых ребрах равна 180°.

Определение



Призма, вписанная в цилиндр, — призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами — образующие цилиндра. **Цилиндр** в этом случае называют **описанным около призмы.**

Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана в цилиндр.



Призма, описанная около цилиндра, — призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра. **Цилиндр** в этом случае называют **вписанным в призму.**

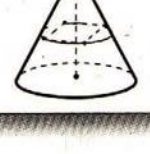
Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ описана около цилиндра.

Свойства

1. Боковые ребра призмы, вписанной в цилиндр, являются образующими цилиндра.
2. Высота призмы равна высоте цилиндра.
3. Около прямой призмы можно описать цилиндр, если около ее основания можно описать окружность.
4. Около любой треугольной призмы можно описать цилиндр.
5. Около любой правильной призмы можно описать цилиндр.

1. Плоскости боковых граней описанной призмы являются касательными плоскостями цилиндра.
2. Высота призмы равна высоте цилиндра.
3. Образующая цилиндра равна высоте боковой грани призмы, проведенной к ребру основания.
4. В прямую призму можно вписать цилиндр, если в ее основание можно вписать окружность.
5. В любую прямую треугольную призму можно вписать цилиндр.
6. В любую правильную призму можно вписать цилиндр.

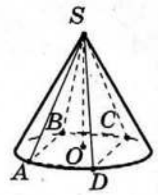
ТАБЛИЦА 84. ВПИСАННАЯ ПИРАМИДА В КОНУС И ОПИСАННАЯ ПИРАМИДА ОКОЛО КОНУСА



Если вершины прямоугольника лежат на боковой поверхности конуса, то две параллельные стороны прямоугольника перпендикулярны оси.

Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, наибольшую площадь боковой поверхности имеет тот, высота которого равна половине высоты конуса.

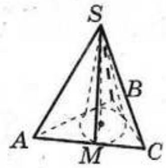
Определение



Пирамида, вписанная в конус, — пирамида, основанием которой является многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершина пирамиды является вершиной конуса.

Пирамида $SABCD$ вписана в конус.

Конус в этом случае называют **описанным около пирамиды.**



Пирамида, описанная около конуса, — пирамида, в основании которой лежит многоугольник, описанный около основы конуса, а вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса.

Пирамида $SABC$ — описанная около конуса.

Конус в этом случае называют **вписанным в пирамиду.**

Свойства

1. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.
2. Высота пирамиды равна высоте конуса.
3. Для того, чтобы около пирамиды можно было описать конус, нужно и достаточно, чтобы боковые ребра пирамиды имели одинаковую длину.
4. Около любой правильной пирамиды можно описать конус.

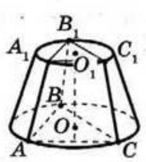
1. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями к конусу.
2. Высота пирамиды равна высоте конуса.
3. Образующая конуса равна высоте боковой грани пирамиды, проведенной из вершины пирамиды.
4. Для того, чтобы в пирамиду можно было вписать конус, нужно и достаточно, чтобы в основание пирамиды можно было вписать окружность, а основание высоты пирамиды было центром этой окружности.
5. В любую правильную пирамиду можно вписать конус.

ТАБЛИЦА 85. УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА, ВПИСАННАЯ В УСЕЧЕННЫЙ КОНУС, И УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА, ОПИСАННАЯ ОКОЛО УСЕЧЕННОГО КОНУСА

В усеченный конус можно вписать сферу тогда и только тогда, когда длина образующей равна сумме радиусов оснований.

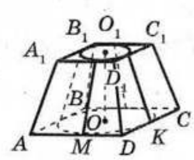
Отношение объема сферы и описанного около нее усеченного конуса равно отношению их полных поверхностей.

Определение



Усеченная пирамида, вписанная в усеченный конус, — усеченная пирамида, основания которой вписаны в основания усеченного конуса. В этом случае говорят, что **усеченный конус описан около усеченной пирамиды.**

Усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$ вписана в усеченный конус.



Усеченная пирамида, описанная около усеченного конуса, —усеченная пирамида, основания которой описаны около оснований усеченного конуса. В этом случае говорят, что **усеченный конус вписан в усеченную пирамиду.**

Усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ описана около усеченного конуса.

Свойства

1. Боковые ребра усеченной пирамиды, вписанной в усеченный конус, являются образующими усеченного конуса.
2. Высота усеченной пирамиды равна высоте усеченного конуса.
3. Для того чтобы около усеченной пирамиды можно было описать усеченный конус, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра усеченной пирамиды имели одинаковую длину.
4. Около любой правильной усеченной пирамиды можно описать усеченный конус.

1. Плоскости боковых граней описанной усеченной пирамиды являются касательными плоскости к усеченному конусу.
2. Высота усеченной пирамиды равна высоте усеченного конуса.
3. В правильную усеченную пирамиду можно было вписать усеченный конус, причем образующие усеченного конуса равны апофеме усеченной пирамиды.

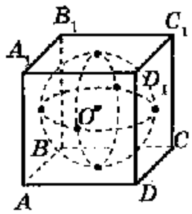
ТАБЛИЦА 86. ШАР, ВПИСАННЫЙ В ПРИЗМУ, И ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПРИЗМЫ

Среди всех замкнутых поверхностей определенной площади шаровая поверхность ограничивает наибольший объем.

Среди тел определенного объема шар имеет наименьшую поверхность.

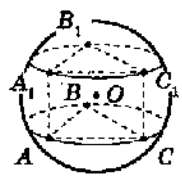
Если все вершины многогранника можно разбить на черные и белые так, что: 1) ни одна из двух черных вершин не будет соединена; 2) число черных вершин будет больше числа белых, тогда многогранник нельзя вписать в сферу (Э. Штейниц, 1927).

Определение



Шар, вписанный в призму, — шар, касающийся каждой грани призмы.
В этом случае **призму** называют **описанной около шара.**

Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ описана около шара.

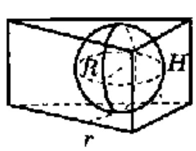


Шар, описанный около призмы, — шар, на поверхности которого лежат все вершины призмы.
В этом случае **призму** называют **вписанной в шар.**

Призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в шар.
$OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1$.

Свойства

1. В призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность, и диаметр этой окружности равен высоте призмы.



2. Радиус R шара, радиус r окружности, вписанной в перпендикулярное сечение, и высота H призмы связаны соотношением:

$$R = r = 0{,}5H.$$

3. Радиус R вписанного шара:

$$R = \frac{2S_\perp}{P_\perp},$$

где $S_\perp$ — площадь перпендикулярного сечения, $P_\perp$ — периметр перпендикулярного сечения.

$$R = \frac{3V}{S},$$

где V — объем призмы, S — площадь полной поверхности призмы.

1. Около призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда она прямая и около ее основания можно описать окружность.

2. Радиус R шара, радиус r окружности, описанной около основания призмы, и высота H призмы связаны соотношением:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2.$$

3. Если O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около оснований призмы, а O — центр описанного шара, то O — середина отрезка O_1O_2.

4. Радиус R шара, описанного около куба со стороной a,

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

ТАБЛИЦА 87. ШАР, ВПИСАННЫЙ В ЦИЛИНДР, И ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ЦИЛИНДРА

Если около шара описан цилиндр, а около цилиндра — призма, то эта призма является описанной около шара.

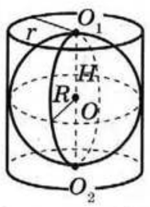
Около сферы описан равносторонний конус и равносторонний цилиндр, тогда: $S^2_{\text{пол.цил.}} = S_{\text{сф.}} \cdot S_{\text{пол.кон.}}$.

В сферу вписан равносторонний конус и равносторонний цилиндр, тогда: $S^2_{\text{пол.цил.}} = S_{\text{сф.}} \cdot S_{\text{пол.кон.}}$.

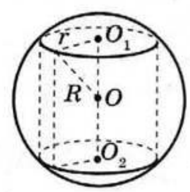
Архимед нашел отношение объема шара, вписанного в цилиндр, к объему этого цилиндра:

$$V_{\text{к.}} = \frac{2}{3} V_{\text{ц.}}.$$

Определение



Шар, вписанный в цилиндр, — шар касается обоих оснований в их центрах, а боковая поверхность цилиндра касается по окружности большего круга шара, которая параллельна основам цилиндра. **Цилиндр** при этом называют **описанным около шара**.



Шар, описанный около цилиндра, — шар, на поверхности которого лежат окружности оснований цилиндра. **Цилиндр** в этом случае называют **вписанным в шар.**

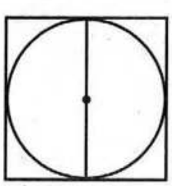
Свойства

1. Высота цилиндра равна диаметру шара, радиус основания цилиндра равен радиусу шара, центр шара лежит на середине высоты.

2. В цилиндр можно вписать шар, если диаметр основания цилиндра равен его высоте.

$$R = r = 0{,}5H.$$

3. Осевое сечение комбинации — квадрат, в который вписан круг.



1. Около цилиндра всегда можно описать шар.

2. Центр описанного шара лежит на середине высоты.

3. Радиус R шара, радиус r основания цилиндра и высота H цилиндра связаны соотношением:

$$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2.$$

4. Осевое сечение комбинации — круг, в который вписан прямоугольник.

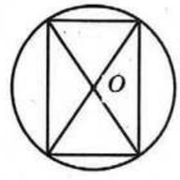


ТАБЛИЦА 88. ШАР, ВПИСАННЫЙ В ПИРАМИДУ, И ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПИРАМИДЫ

Если около пирамиды, у которой боковые ребра равны по l, а высота H, описана сфера радиуса R, то

$$R = \frac{l^2}{2H}.$$

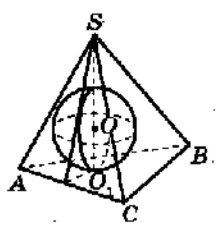
На поверхности шара самым коротким расстоянием между двумя точками является дуга большой окружности, проходящая через эти точки.

Если непересекающиеся ребра треугольной пирамиды попарно равны, то у такой пирамиды центры описанной и вписанной сфер совпадают.

Если сфера касается всех ребер треугольной пирамиды, то суммы непересекающихся ребер пирамиды равны.

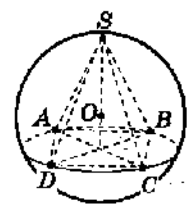
Если в треугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают, то сумма плоских углов при каждой ее вершине равна 180°.

Определение



Шар, вписанный в пирамиду, — шар, касающийся каждой грани пирамиды. При этом **пирамиду** называют **описанной около шара.**

Пирамида $SABC$ описана около шара.



Шар, описанный около пирамиды, — шар, на поверхности которого лежат все вершины пирамиды. В этом случае **пирамиду** называют **вписанной в шар.**

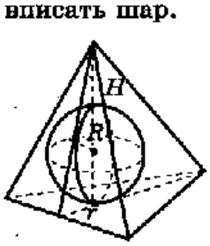
Пирамида $SABCD$ вписана в шар.

Свойства

1. Центр шара, вписанного в пирамиду, лежит в точке пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ребрах пирамиды.

2. Если в основание пирамиды можно вписать окружность, а основание высоты пирамиды является центром этой окружности, то в пирамиду можно вписать шар.

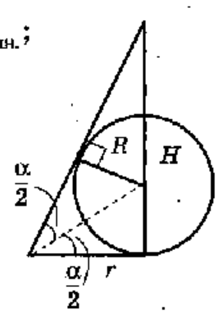
3. В любую правильную пирамиду можно вписать шар.



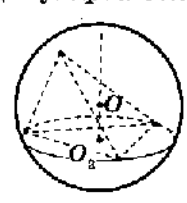
$$\frac{R}{H-R} = \frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}};$$

$$V = \frac{1}{3} R S_{\text{полн.}};$$

$$R = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$



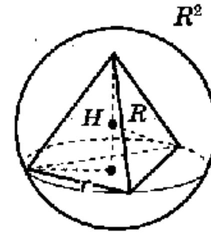
1. Центр шара, описанного около произвольной пирамиды, лежит на прямой, которая перпендикулярна плоскости основания и проходит через центр окружности, описанной около основания, в точке пересечения этой прямой с плоскостью, перпендикулярной боковому ребру и которая проходит через середину этого ребра.



2. Для того чтобы около пирамиды можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность.

3. Около любой правильной пирамиды можно описать шар.

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2.$$



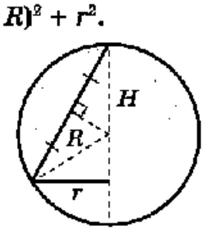


ТАБЛИЦА 89. ШАР, ВПИСАННЫЙ В КОНУС, И ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО КОНУСА

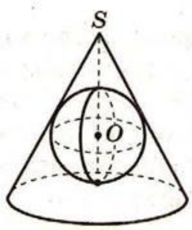
Если около сферы описан конус, а около конуса — пирамида, то эта пирамида является описанной около сферы.

Если в шар вписан равносторонний цилиндр и равносторонний конус, то $V_{ц.} = \sqrt{V_{шара} \cdot V_{кон.}}$.

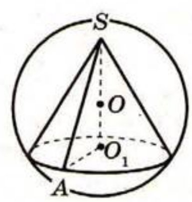
Если около шара описаны равносторонний цилиндр и равносторонний конус, то $V_{ц.} = \sqrt{V_{шар.} \cdot V_{кон.}}$.

На поверхности шара несправедлива аксиома параллельности Эвклида. Сумма углов сферического треугольника всегда больше 180° и даже может быть равной 270°.

Определение



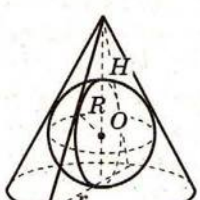
Шар, вписанный в конус, — шар, касающийся основания конуса в его центре, а боковой поверхности — окружностью. В этом случае **конус** считают **описанным около шара.**



Шар, описанный около конуса, — шар, на поверхности которого лежат вершина и основание конуса. В этом случае **конус** считают **вписанным в шар.**

Свойства

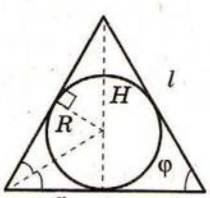
В конус всегда можно вписать шар. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, который является осевым сечением конуса.



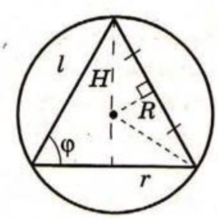
$$R = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2};$$

$$\frac{R}{H-R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}};$$

$$R = \frac{Hr}{r+l}.$$



Около конуса всегда можно описать шар. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, который является осевым сечением конуса.

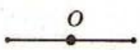


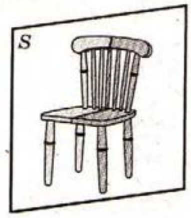
$$R = \frac{r}{\sin 2\varphi};$$

$$R = \frac{l^2}{2H};$$

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2;$$
$$(2R - H) \cdot H = r^2.$$

ТАБЛИЦА 90. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУР. ДВИЖЕНИЕ

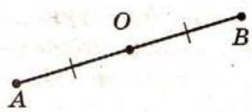




Учение о симметрии лежит в основе кристаллографии (науки о строении и свойстве кристаллов).

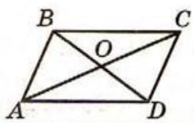
Слово «симметрия» греческого происхождения и в переводе означает «правильное отношение», «соизмеримость».

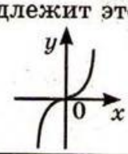
Симметрия относительно точки (центральная симметрия)

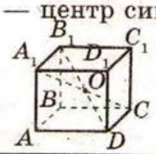


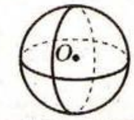
Две точки A и B симметричны относительно точки O, если точка O — середина отрезка AB.

Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. O — центр симметрии.

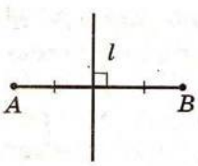








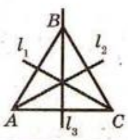
Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)

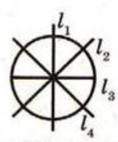


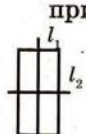
Две точки A и B симметричны относительно прямой l, если прямая l перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину.

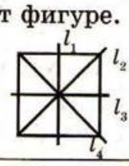
l — ось симметрии.

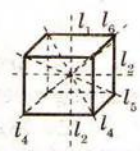
Фигуру называют симметричной относительно оси l, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой l также принадлежит фигуре.

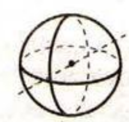




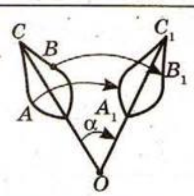








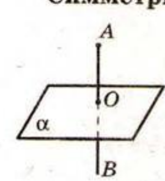
Поворот



Поворот плоскости около данной точки O — преобразование, при котором каждый луч, выходящий из точки O, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении.

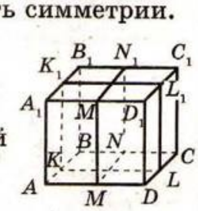
$\angle COC_1 = \angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \alpha.$

Симметрия относительно плоскостей



Две точки A и B симметричны относительно плоскости α, если эта плоскость перпендикулярна отрезку AB и делит его пополам. α — плоскость симметрии.

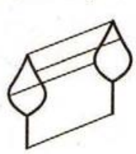
Фигуру называют симметричной относительно плоскости α, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно плоскости α также принадлежит фигуре.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Параллельный перенос

Параллельный перенос — преобразование, при котором точки смещаются вдоль параллельных (или совпадающих прямых) на одно и то же расстояние.



Свойства

1. Параллельный перенос является движением.
2. При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя), плоскость переходит или в себя, или в параллельную ей плоскость.

Движение

Движение — преобразование, при котором сохраняется расстояние между точками фигуры.

При движении сохраняются углы, прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, плоскости — в плоскости.

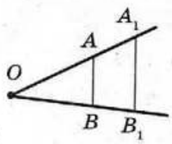
Равные фигуры — фигуры, которые переводятся движением друг в друга.

ТАБЛИЦА 91. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ГОМОТЕТИЯ

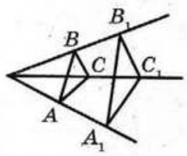
Понятие подобия лежит в основе моделирования.

Слово «гомотетия» греческого происхождения и означает «одинаковое расположение».

Гомотетия



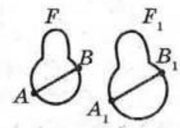
Гомотетия — преобразование, при котором все точки смещаются вдоль прямых, проходящих через одну и ту же точку **(центр гомотетии)** так, что



$$OA_1 = k \cdot OA, OB_1 = k \cdot OB,$$
$$OC_1 = k \cdot OC,$$

где k — **коэффициент гомотетии.**

Подобие фигур



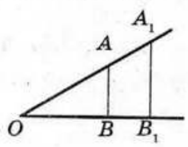
Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называют преобразованием подобия, если при этом преобразованные расстояния между точками изменяются в одно и то же количество раз.

$$F_1 \sim F, \text{если } \frac{AB}{A_1B_1} = k,$$

k — коэффициент подобия.

Свойства гомотетии

1. При гомотетии отрезок переходит в параллельный ему отрезок.

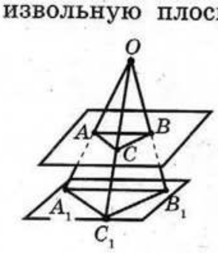


$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = k.$$

2. При гомотетии сохраняются углы между лучами.

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1.$$

3. Преобразование гомотетии переводит произвольную плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя, если $k = 1$).

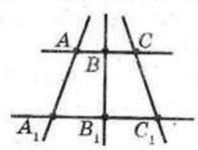


$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = k.$$

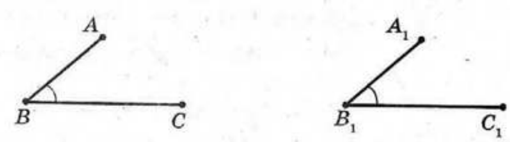
4. Гомотетия является преобразованием подобия.

Свойства подобия

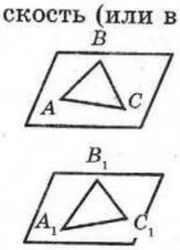
1. Точки, лежащие на одной прямой при преобразовании подобия, переходят в точки, лежащие на одной прямой, при этом сохраняется порядок их взаимного расположения.



2. Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки; сохраняет углы между лучами.



3. Преобразование подобия переводит произвольную плоскость в параллельную плоскость (или в себя).



$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k.$$

Подобные фигуры

Две фигуры F и F_1 называют подобными ($F \sim F_1$), если они переводятся друг в друга преобразованием подобия.

Если $F_1 \sim F_2$, а $F_2 \sim F_3$, то $F_1 \sim F_3$.

ТАБЛИЦА 92. ДЕККАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Рене Деккарта считают творцом аналитической геометрии.

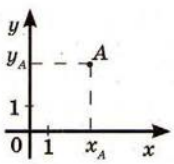
Аналитическая геометрия — раздел геометрии, в котором свойства геометрических фигур изучают уравнения этих фигур в некоторой системе координат.

Термин «абсцисса» происходит от латинского «abscissus», что означает «отделенный», а «ордината» берет начало от латинского «ordinatus» — «упорядоченный». Термин «координаты» происходит от латинского «со» — вместе и «ordinatus» — упорядоченный.

Термины «ордината», «абсцисса», «координаты» и «оси координат» ввел Г. Лейбниц.

Рене Декарт (1596–1650)

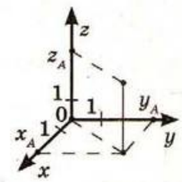
Координаты точки



Каждой точке A плоскости соответствуют два числа: **абсцисса x_A и ордината y_A**: $A(x_A;\ y_A)$. Эти числа называют **деккартовыми координатами данной точки.**

Каждой паре $(x_A;\ y_A)$ соответствует единая точка $A(x_A;\ y_A)$ координатной плоскости.

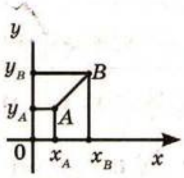
Ось x — **ось абсцисс**, ось y — **ось ординат**, точка O — **начало координат**.



Каждой точке A пространства соответствует три числа: **абсцисса x_A, ордината y_A, аппликата z_A**: $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$: эти числа называют **деккартовыми координатами точки.** Любым трем числам $(x_A;\ y_A;\ z_A)$ соответствует единая точка $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ пространства.

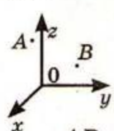
Ось x — **ось абсцисс**, ось y — **ось ординат**, ось z — **ось аппликат**, точка O — **начало координат.**

Расстояние между точками



Если $A(x_A;\ y_A), B(x_B;\ y_B)$, то

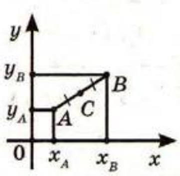
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Если $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Координаты середины отрезка



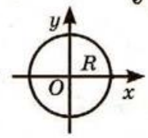
Если $A(x_A;\ y_A), B(x_B;\ y_B)$, $AC = BC$, то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Если $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $AC = BC$, то

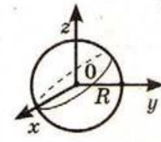
$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2},\quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

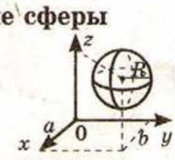
Уравнение окружности



$x^2 + y^2 = R^2$ $\qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

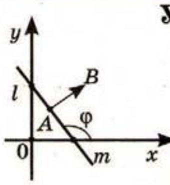
Уравнение сферы





$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $\qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

Уравнение прямой

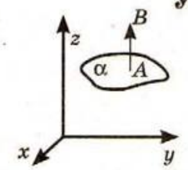


$y = kx + l$, где $k = \operatorname{tg}\ \varphi$.

$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$,

где $A(x_A;\ y_A)$, $\overrightarrow{AB}(a;\ b)$, $\overrightarrow{AB} \perp m$.

Уравнение плоскости



$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$,

где $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $\overrightarrow{AB}(a;\ b;\ c)$, $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$.

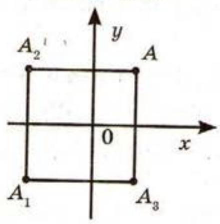
Пьер Ферма (1601–1665)

Суммы соответствующих координат вершин треугольника и середин сторон треугольника равны.

Сооснователем аналитической геометрии Деккарта считают Пьера Ферма.

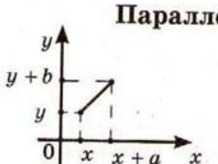
Преобразование фигур на плоскости

Симметрия



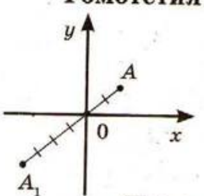
Точки / симметрия относительно	$A(1; 1)$	$A(x; y)$
точки O	$A_1(-1; -1)$	$A_1(-x; -y)$
оси x	$A_3(1; -1)$	$A_3(x; -y)$
оси y	$A_2(-1; 1)$	$A_2(-x; y)$

Параллельные переносы



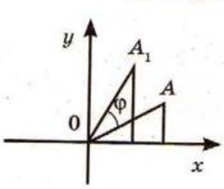
$$\begin{cases} x_1 = x + a, \\ y_1 = y + b. \end{cases}$$

Гомотетия относительно точки O



$$\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky,\ k \neq 0. \end{cases}$$

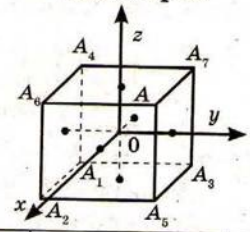
Поворот около точки O



$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

Преобразование фигур в пространстве

Симметрия



Точки / симметрия относительно	$A(1; 1; 1)$	$A(x; y; z)$
точки O	$A_1(-1; -1; -1)$	$A_1(-x; -y; -z)$
оси x	$A_2(1; -1; -1)$	$A_2(x; -y; -z)$
оси y	$A_3(-1; 1; -1)$	$A_3(-x; y; -z)$
оси z	$A_4(-1; -1; 1)$	$A_4(-x; -y; z)$
плоскости xy	$A_5(1; 1; -1)$	$A_5(x; y; -z)$
плоскости xz	$A_6(1; -1; 1)$	$A_6(x; -y; z)$
плоскости yz	$A_7(-1; 1; 1)$	$A_7(-x; y; z)$

Параллельный перенос

$$\begin{cases} x_1 = x + a, \\ y_1 = y + b, \\ z_1 = z + c. \end{cases}$$

Гомотетия относительно точки O

$$\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky, \\ z_1 = kz,\ k \neq 0. \end{cases}$$

157

ТАБЛИЦА 94. ВЕКТОРЫ

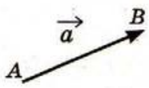
Интерес к векторам и векторному исчислению возник у математиков в XIX в. в связи с потребностями механики и физики.

В современной математике раздел, в котором излагается учение о действиях с векторами, называют векторной алгеброй.

Слово «вектор» происходит от латинского «vector», что означает «несущий», или «везущий».

Обозначение вектора ввел У. Гамильтон (1846).

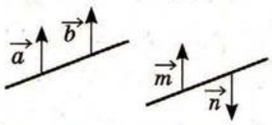
Определение



Вектор — направленный отрезок.

$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ — вектор (A — начало вектора, B — конец вектора).

Длина вектора (модуль, абсолютная величина вектора) — длина отрезка, изображающего вектор. $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, a — модуль вектора.



Равнонаправленные (разнонаправленные) векторы — векторы, лежащие в равнонаправленных (разнонаправленных) лучах.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — равнонаправленные; векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — разнонаправленные.

Равные векторы — два вектора, которые равнонаправлены и имеют одинаковую длину.

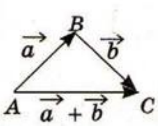
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — равные, $\vec{a} = \vec{b}$.

Противолежащие векторы — два вектора, которые разнонаправлены и имеют одинаковую длину.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — противолежащие, $\vec{a} = -\vec{c}$.

Коллинеарные векторы (ненулевые) — ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

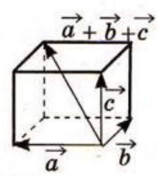
Сумма векторов



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Правило треугольника

Правило параллелограмма



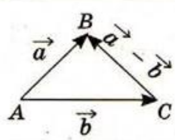
Правило параллелепипеда

Свойства

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Разность векторов



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

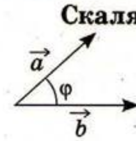
Свойства

$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$,

$\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$,

$\vec{0} - \vec{a} = -\vec{a}$,

Скалярное произведение векторов



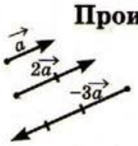
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Свойства

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$,

$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Произведение вектора на число



$\lambda\vec{a}$ означает, что $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}$ равнонаправленные, если $\lambda > 0$; векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}$ разнонаправленные, если $\lambda < 0$.

Свойства

$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$, $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Условие коллинеарности векторов

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Условие ортогональности векторов

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.